

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\text{Diff}_0^\infty(M)$

Emmanuel Militon

Tome 141
Fascicule 1

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 35-46

ÉLÉMENTS DE DISTORSION DE $\text{Diff}_0^\infty(M)$

PAR EMMANUEL MILITON

RÉSUMÉ. — Dans cet article, on montre que, dans le groupe $\text{Diff}_0^\infty(M)$ des difféomorphismes isotopes à l'identité d'une variété compacte M , tout élément récurrent est de distorsion. Pour ce faire, on généralise une méthode de démonstration utilisée par Avila pour le cas de $\text{Diff}_0^\infty(\mathbb{S}^1)$. La méthode nous permet de retrouver un résultat de Calegari et Freedman selon lequel tout homéomorphisme de la sphère isotope à l'identité est un élément de distorsion.

ABSTRACT (*Distortion elements of $\text{Diff}_0^\infty(M)$*). — We consider, on a compact manifold, the group of diffeomorphisms that are isotopic to the identity. We show that every recurrent element is a distortion element. To prove this, we generalize a method used by Avila in the case of the group of diffeomorphisms of the circle. The method also provides a new proof of a result by Calegari and Freedman: on a sphere, in the group of homeomorphisms that are isotopic to the identity, every element is distorted.

Texte reçu le 25 mars 2010, accepté le 9 janvier 2012.

EMMANUEL MILITON, Fondation mathématique Jacques Hadamard-Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex •
E-mail : emmanuel.militon@math.polytechnique.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 37C85.

Mots clefs. — Difféomorphisme, système dynamique, théorie géométrique des groupes.

1. Énoncé des résultats

L'étude des éléments de distorsion des groupes de difféomorphismes ou d'homéomorphismes non-conservatifs d'une variété trouve son origine dans une question de Franks et Handel (voir [6] et [5]) : une rotation du cercle est-elle distordue dans le groupe des homéomorphismes du cercle ou des difféomorphismes du cercle ? Qu'en est-il si l'on remplace le cercle par la sphère de dimension 2 ?

La réponse à ces questions est fournie par Calegari et Freedman dans [4] : une rotation du cercle est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^1 du cercle. Cependant, les auteurs précisent ne pas savoir s'il en est de même en régularité C^∞ . Dans le même article, ils prouvent qu'une rotation de la sphère S^2 est distordue dans le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère. Enfin, en ce qui concerne la régularité C^0 , Calegari et Freedman ont prouvé un résultat très général : en toute dimension N , un homéomorphisme h de la sphère S^N est distordu.

Dans un article ultérieur, Avila a montré que, dans le groupe des difféomorphismes du cercle de classe C^∞ , tout élément récurrent est distordu. Nous généralisons dans cet article le résultat d'Avila à toute variété.

2. Résultats

Avant toute chose, commençons par introduire des définitions et des notations qui nous seront utiles par la suite.

DÉFINITION 1. — Soit G un groupe. Pour une partie finie S de G , si un élément g de G est dans le groupe engendré par S , on note :

$$l_S(g) = \inf \left\{ n \in \mathbb{N}, \exists (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{\pm 1\}^n, \exists (s_i)_{1 \leq i \leq n} \in S^n, g = \prod_{i=1}^n s_i^{\epsilon_i} \right\}.$$

Un élément g de G est dit distordu (ou de distorsion) s'il existe une partie finie S de G telle que g appartient au groupe engendré par S et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0.$$

On remarque que, comme la suite $(l_S(g^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sous-additive, il suffit de montrer que :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{l_S(g^n)}{n} = 0$$

pour obtenir que l'élément g est distordu.

Étant donnée une variété différentiable M , on note :

- $\text{Homeo}_0(M)$ l'ensemble des homéomorphismes à support compact dans M isotopes à l'identité par une isotopie à support compact ;

- pour un élément r de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\text{Diff}_0^r(M)$ l'ensemble des difféomorphismes de M de classe C^r isotopes à l'identité par une isotopie à support compact (en particulier, $\text{Homeo}_0(M) = \text{Diff}_0^0(M)$).

Le support d'un homéomorphisme f de M est ici défini par :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in M, f(x) \neq x\}}.$$

On note d_r une distance qui définit la topologie de $\text{Diff}_0^r(M)$.

DÉFINITION 2. — *On dit qu'un difféomorphisme f de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est récurrent si et seulement si :*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d_\infty(f^n, Id_M) = 0.$$

L'objet de la présente note est de démontrer les théorèmes suivants. Ce premier théorème généralise le résultat d'Avila pour les difféomorphismes du cercle (voir [1]).

THÉORÈME 1. — *Si M est une variété compacte, tout élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est distordu.*

Comme dans [1], la méthode employée permet de démontrer que toute suite d'éléments récurrents $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ est simultanément distordue, au sens où l'on peut trouver un ensemble fini S tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \liminf_{p \rightarrow +\infty} \frac{l_S(f_n^p)}{p} = 0.$$

La méthode employée par [1] permet de donner une nouvelle démonstration du résultat de Calegari et Freedman (voir [4]).

THÉORÈME 2 (Calegari-Freedman). — *Tout élément de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est distordu.*

Là encore, on pourrait montrer que toute suite d'éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^n)$ est simultanément distordue.

3. Démonstration des théorèmes

La démonstration des théorèmes 1 et 2 repose sur une généralisation des résultats de [1] à toute variété. La démarche et les notations sont similaires à celles présentées dans [1] mais la généralisation de la méthode aux dimensions supérieures nécessite de manière cruciale des résultats de perfection locale qui proviennent de [8]. On ne démontrera le théorème 1 que dans le cas d'une variété M de dimension supérieure ou égale à 2. Le cas de la dimension 1 est traité dans [1].

Les théorèmes vont découler des lemmes suivants.

LEMME 1. — Soit M une variété compacte de dimension supérieure ou égale à 2.

Il existe des suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telles que toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Diff}_0^\infty(M)$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_\infty(h_n, Id_M) < \epsilon_n,$$

vérifie la propriété suivante : il existe un ensemble fini $S \subset \text{Diff}_0^\infty(M)$ tel que, pour tout entier n ,

- le difféomorphisme h_n appartient au sous-groupe engendré par S .
- on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.

LEMME 2. — Soit N un entier naturel.

Il existe une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que, pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$, il existe un ensemble fini $S \subset \text{Homeo}_0(\mathbb{S}^N)$ tel que, pour tout entier n :

- l'homéomorphisme h_n appartient au groupe engendré par S .
- on a l'inégalité : $l_S(h_n) \leq k_n$.

Admettons pour l'instant ces lemmes, qui seront démontrés dans la section suivante, et démontrons les théorèmes.

Démonstration des théorèmes. — Soit f un élément récurrent de $\text{Diff}_0^\infty(M)$. Considérons une application strictement croissante $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{p(n)} = 0 \\ d_\infty(f^{p(n)}, Id_M) \leq \epsilon_n \end{cases},$$

où les suites $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont données par le lemme 1. Ce même lemme appliqué à la suite $(f^{p(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ nous donne l'existence d'un ensemble fini S qui montre que f est distordu. Le théorème 2 se montre de la même manière, en utilisant le lemme 2. □

4. Démonstration des lemmes 1 et 2

Pour mener à bien la démonstration de ces lemmes, nous aurons besoin des lemmes suivants, qui seront démontrés dans la section suivante et portent sur les difféomorphismes de \mathbb{R}^n . Les lemmes 3 et 4 sont des analogues des lemmes 1 et 2 dans le cas des commutateurs de difféomorphismes de \mathbb{R}^N . Notons $B(0, 2)$ la boule ouverte de centre 0 et de rayon 2. Si f et g sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^n , on note $[f, g]$ le difféomorphisme $fgf^{-1}g^{-1}$.