Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FORMES NORMALES POUR LES CHAMPS CONFORMES PSEUDO-RIEMANNIENS

Charles Frances & Karin Melnick

Tome 141
Fascicule 3

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 377-421

Bull. Soc. math. France
141 (3), 2013, p. 377–421

FORMES NORMALES POUR LES CHAMPS CONFORMES PSEUDO-RIEMANNIENS

PAR CHARLES FRANCES & KARIN MELNICK

RÉSUMÉ. — Nous établissons des formes normales pour les champs conformes sur une variété pseudo-riemannienne, au voisinage d'une singularité. Sur une variété lorentzienne analytique, nous montrons qu'ou bien un tel champ est linéarisable au voisinage de la singularité, ou bien la variété est conformément plate. Dans tous les cas, le champs est localement conjugué à une forme normale sur un espace modèle. Pour des métriques lisses de signature quelconque, nous obtenons un résultat analogue sous l'hypothèse supplémentaire que la différentielle du flot au point fixe est bornée.

ABSTRACT (*Normal forms for conformal vector fields*). — We establish normal forms for conformal vector fields on pseudo-Riemannian manifolds in the neighborhood of a singularity. For real-analytic Lorentzian manifolds, we show that the vector field is analytically linearizable or the manifold is conformally flat. In either case, the vector field is locally conjugate to a normal form on a model space. For smooth metrics of general signature, we obtain the analogous result under the additional assumption that the differential of the flow at the fixed point is bounded.

Texte reçu le 5 septembre 2011 et accepté le 13 juillet 2012.

CHARLES FRANCES, Département de Mathématiques, Bât. 425, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex • *E-mail :* `charles.frances@math.u-psud.fr` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~frances/`

KARIN MELNICK, Department of Mathematics, University of Maryland, College Park, MD 20742 • *E-mail :* `karin@math.umd.edu` • *Url :* `http://www2.math.umd.edu/~kmelnick/`

Classification mathématique par sujets (2010). — 53A50, 53C50.

Mots clefs. — Champs de vecteurs conformes, structures pseudo-riemanniennes.

C. Frances a bénéficié du projet ANR *Geodycos*. K. Melnick a bénéficié du soutien du National Science Foundation fellowship DMS-855735 et remercie l'Insitut Erwin Schrödinger, où elle a passé deux mois pendant l'écriture de cet article.

1. Introduction

Cet article étudie l'allure locale des champs de vecteurs conformes, c'est-à-dire les champs de vecteurs lisses X sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) qui satisfont $\mathscr{L}_X g = \sigma g$, pour une certaine fonction $\sigma \in C^\infty(M)$. Ce sujet a déjà fait l'objet d'une littérature abondante, notamment dans le cadre des champs de vecteurs conformes sur les espaces-temps, c'est-à-dire les variétés lorentziennes (voir en particulier [13], [6], [5], [17], [15], [16], et [23]).

À titre d'exemple, commençons par décrire une famille intéressante de champs conformes, qui va jouer un rôle fondamental dans tout l'article. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q), $1 \leq p \leq q$, le projectivisé du cône de lumière d'une forme quadratique de signature $(p+1, q+1)$ est naturellement muni d'une structure pseudo-riemannienne conforme de signature (p, q). Ce projectivisé, muni de cette structure conforme naturelle est un espace compact appellé *l'univers d' Einstein* de signature (p, q). On le note $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Le groupe $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$ agit transitivement sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$ par transformations conformes. Soit o un point fixé sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$. Le stabilisateur de o dans $\mathrm{PO}(p+1, q+1)$ est un sous-groupe parabolique que nous notons P. Ainsi, du point de vue conforme, $\mathrm{Ein}^{p,q}$ est simplement l'espace homogène $\mathrm{PO}(p+1, q+1)/P$. Maintenant, tout groupe à un paramètre de P donne lieu à un champ de vecteurs conforme sur $\mathrm{Ein}^{p,q}$, admettant une singularité o. De tels champs conformes seront appelés *champs de Möbius*. Nous verrons que déjà dans le cadre lorentzien, il existe de nombreuses formes locales différentes pour les champs de Möbius au voisinage d'une de leurs singularités.

Soit maintenant (M, g) une variété pseudo-riemannienne de signature (p, q), avec $p + q \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M s'annulant en un point x_0. L'existence d'une connexion de Cartan canonique associée à la structure conforme $[g]$ permet d'étudier le champ X grâce à la connaissance de son jet d'ordre 2 en x_0. Cette propriété a déjà été utilisée avec succès, par exemple dans [1], ou [20] pour l'étude des champs de vecteurs projectifs. Dans [11], puis dans [10], nous avons systématisé cet usage de la connexion de Cartan pour l'étude des champs conformes, et nous avons expliqué comment associer à X un champ de Möbius X_h admettant une singularité en o, que l'on appelle le *champ d'holonomie de X en x_0*. Dans ces précédents travaux, nous avons commencé à établir un dictionnaire entre les propriétés locales de X_h au voisinage de o, et celles de X au voisinage de x_0. Ceci nous a conduit à formuler la question suivante :

Question 1.1. — *En dimension $n \geq 3$, un champ de vecteurs conforme pseudo-riemannien X, est-il toujours localement conjugué, au voisinage d'une singularité x_0, à son champ d'holonomie ?*

Bien entendu, une réponse positive à cette question règlerait de manière très satisfaisante le problème de trouver des formes normales pour les champs conformes au voisinage d'une singularité. On serait en effet ramené à l'étude des champs de Möbius, pour lesquels on peut faire des calculs explicites.

Rappelons que dans le cadre riemannien, la réponse à la Question 1.1 est affirmative. Cela découle du théorème ci-dessous, qui peut s'obtenir à partir des travaux de D. Alekseevskii (voir [1], Section 2). Une preuve détaillée se trouve dans [10], théorème 1.2.

Théorème. — *Soit (M, g) une variété riemannienne, lisse, de dimension $n \geq 3$, munie d'un champ de vecteurs conforme X. On suppose que X s'annule en $x_0 \in M$. Alors ou bien X est linéarisable, et complet sur un voisinage de x_0, ou bien il existe un voisinage de x_0 qui est conformément plat. Dans tous les cas, le champ X est C^∞-conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.*

1.1. Énoncés des résultats. — Le but du présent article est de répondre, au moins partiellement, à la Question 1.1 dans le cadre des signatures autres que riemanniennes. On obtient en particulier un résultat complet pour les structures conformes lorentziennes analytiques :

Théorème 1.2. — *Soit (M, g) une variété lorentzienne, analytique, de dimension $n \geq 3$. Soit X un champ de vecteurs conforme analytique sur M, admettant une singularité x_0. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, le champ X est analytiquement conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.

Dans certains cas, on peut obtenir un résultat de même nature, en signature (p, q) générale, et toujours pour des structures analytiques. Avant de l'énoncer, précisons que si X est un champ de vecteurs conformes ayant une singularité x_0, alors la différentielle du flot local de X en x_0, notée $D_{x_0}\phi_X^t$, est définie pour tout $t \in \mathbf{R}$, et détermine, à conjugaison près, un sous-groupe à un paramètre de transformations conformes linéaires de $\mathrm{CO}(p, q)$.

Théorème 1.3. — *Soit (M, g) une variété analytique, pseudo-riemannienne, de dimension $n \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M, admettant une singularité en x_0. On suppose que $\{D_{x_0}\phi_X^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre semi-simple sur $\mathbf{C}$. Alors :*

1. *Ou bien X est analytiquement linéarisable au voisinage de x_0.*
2. *Ou bien (M, g) est conformément plate.*

Dans les deux cas, X est analytiquement conjugué au voisinage de x_0 à son champ d'holonomie X_h.

Sans faire d'hypothèse d'analyticité, nos méthodes permettent encore d'obtenir des informations sur l'allure locale de certains champs conformes. Un champ conforme sur (M, g) est *essentiel* si son flot local ne préserve aucune métrique de la classe conforme $[g]$. Il est dit *inessentiel* sinon.

THÉORÈME 1.4. — *Soit (M, g) une variété lisse, pseudo-riemannienne, de dimension $n \geq 3$, et X un champ de vecteurs conforme sur M, admettant une singularité en x_0. On note $\{\phi_X^t\}$ le flot local engendré par X sur M, et on suppose que $\{D_{x_0}\phi_X^t\}_{t\in\mathbf{R}}$ est un groupe à un paramètre relativement compact de* $\mathrm{CO}(T_{x_0}M)$. *Alors :*

1. *Ou bien il existe un voisinage U de x_0 sur lequel X est complet et engendre un flot relativement compact dans* $\mathrm{Conf}(U)$. *Dans ce cas X est linéarisable en x_0, et est inessentiel sur U.*
2. *Si l'on n'est pas dans le premier cas, X est essentiel sur tout voisinage de x_0. Dans ce cas, (M, g) possède un ouvert conformément plat et contenant x_0 dans son adhérence.*

Ce résultat est une étape essentielle dans les preuves des théorèmes 1.2 et 1.3. Nous verrons que dans le cas (2) du théorème, on a de plus une description dynamique relativement précise du flot $\{\phi_X^t\}$ au voisinage de la singularité x_0, ainsi qu'une description géométrique de l'ouvert où $[g]$ est conformément plate (voir les énoncés des théorèmes 4.1 et 4.3).

Il est naturel de se demander s'il ne serait pas possible d'améliorer les conclusions dans le cas (2) du théorème en montrant qu'un voisinage de la singularité x_0 doit être conformément plat. Il n'en est rien, par exemple lorsque la signature est lorentzienne, comme le montrent les exemples de la Section 6 de [8]. Toutefois, si l'on fait une hypothèse de compacité sur M, on peut raisonablement espérer des conclusions plus fortes. En particulier :

QUESTION 1.5. — *Soient (M, g) et X comme dans le théorème 1.4. On suppose que M est compacte, et que le flot global $\{\phi_X^t\}$ n'est pas relativement compact dans* $\mathrm{Conf}(M)$. *La variété (M, g) est-elle forcément conformément plate ?*

Dans cette direction, le second auteur et Andreas Čap ont récemment étudié des flots essentiels sur des géométries paraboliques générales dans [4]. Ils ont étendu des outils développés dans [20] et le présent article, et les ont appliqués à diverses géométries pour obtenir des descriptions dynamiques au voisinage de points fixes et montrer, dans certains cas, l'annulation de la courbure.