Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SEMI-GROUPES FORTEMENT AUTOMATIQUES

Paul Mercat

Tome 141
Fascicule 3

2013

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 423-479

Bull. Soc. math. France
141 (3), 2013, p. 423–479

SEMI-GROUPES FORTEMENT AUTOMATIQUES

by Paul Mercat

Abstract. — Dans cet article, nous introduisons la notion de semi-groupe fortement automatique, qui entraîne la notion d'automaticité des semi-groupes usuelle. On s'intéresse particulièrement aux semi-groupes de développements en base β, pour lesquels on obtient un critère de forte automaticité.

Résumé (*Strongly automatic semigroups*). — In this paper, we introduce the notion of strongly automatic semigroup, which implies the usual notion of automaticity. We focus on semigroups of β-adics developpements, for which we obtain a criterion of strong automaticity.

1. Introduction

1.1. Organisation de l'article. — Dans cet article, nous introduisons la notion de semi-groupe fortement automatique, qui consiste à avoir un ensemble de relations qui soit un langage rationnel, c'est-à-dire reconnaissable par un automate fini. On démontre que la forte automaticité entraîne l'automaticité au sens usuel.

Texte reçu le 18 novembre 2011 et accepté le 3 juillet 2012.

Paul Mercat, Université Paris-Sud 11, 91405 Orsay • *E-mail :* `paul.mercat@math.u-psud.fr` • *Url :* `http://www.math.u-psud.fr/~mercat`

2010 Mathematics Subject Classification. — 20M17, 20M05, 20M35, 11A63, 68R15.

Key words and phrases. — Semi-groupes, monoïdes, présentation finie, automaticité, automates finis, langages rationnels, nombres algébriques, nombres de Salem, développements β-adiques, croissance.

© Société Mathématique de France

Pour les semi-groupes correspondant aux développements en base β, on démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Définissons un semi-groupe* Γ *engendré par les transformations :*

$$x \mapsto \beta x + t$$

pout $t \in A \subset \mathbb{C}$, *où* A *est une partie finie de* $\mathbb{C}$, *et* β *est un nombre complexe.*

Si le nombre complexe β *est transcendant, ou bien algébrique mais sans conjugué de module 1, alors pour toute partie* $A \subset \mathbb{C}$ *finie, le semi-groupe* Γ *est fortement automatique.*

Réciproquement, si le nombre complexe β *est algébrique et a au moins un conjugué de module 1, alors il existe une partie* $A \subset \mathbb{C}$ *finie telle que le semi-groupe* Γ *n'est pas fortement automatique.*

On commencera par faire des rappels sur les automates (voir partie 2). Puis dans la partie 3, on définira ce qu'est un semi-groupe fortement automatique, et l'on donnera quelques propriétés. On rappellera ensuite ce qu'est un semi-groupe automatique, et l'on montrera que les semi-groupes fortement automatiques sont automatiques. On s'intéressera ensuite aux semi-groupes correspondants aux développements en base β dans la partie 4 où l'on démontrera le théorème annoncé (voir théorème 4.2 et proposition 4.15). Enfin, la partie 5 est consacrée à des exemples, et rappelle des travaux en lien avec cet article.

Je remercie Laurent Bartholdi pour ses remarques qui ont entre autres permis d'obtenir un exemple de semi-groupe qui soit fortement automatique mais qui ne soit pas de présentation finie (voir proposition 4.31), et permis de généraliser plusieurs résultats. Je remercie aussi Vincent Guirardel pour ses nombreuses remarques pertinentes qui ont permis d'améliorer ce texte.

1.2. Motivation. — Ces notions d'automaticité et de forte automaticité fournissent d'une part une façon de représenter un semi-groupe infini avec une quantité finie de données (et donc cela permet de manipuler facilement ce semi-groupe sur ordinateur), et d'autre part donnent des informations combinatoires sur le semi-groupe (on obtient par exemple une asymptotique très précise du nombre d'éléments du semi-groupe). La notion de forte automaticité que l'on introduit, bien que plus simple que la notion d'automaticité, ne semble pas avoir été étudiée parce-qu'elle n'est pas intéressante pour les groupes. Mais il existe des exemples de semi-groupes fortement automatiques intéressants :

Voici un exemple simple de semi-groupe fortement automatique. Considérons le monoïde engendré par les trois transformations affines :

$$\begin{cases} 0 : x \mapsto x/3, \\ 1 : x \mapsto x/3 + 1, \\ 3 : x \mapsto x/3 + 3. \end{cases}$$

Par définition, c'est l'ensemble des composées de ces trois applications (en incluant l'identité).
Voici quelques questions que l'on peut se poser :

- Quel est l'asymptotique du nombre d'éléments pour la longueur des mots ?
- Comment peut-on déterminer si deux mots en les générateurs représentent le même élément du semi-groupe ?
- Y a-t'il une façon de représenter les éléments du semi-groupes par des mots uniques particuliers (que l'on appelera mots réduits) ?

La réponse à ces questions est donnée par la structure automatique du semi-groupe. Celle-ci est donnée par des automates tels que l'on peut en voir sur les figures suivantes (voir la partie 2 pour des rappels sur les automates) :

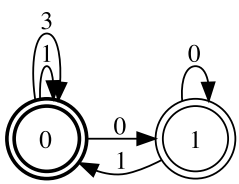

FIGURE 1. Automate reconnaissant un ensemble de mots réduits du semi-groupe. Les mots réduits sont ici les mots minimaux pour l'ordre lexicographique inverse, avec $0 < 1 < 3$.

On appelle *mots réduits* un choix de représentants uniques pour les éléments du semi-groupe par des mots en les générateurs. On voit sur l'automate de la figure 1 que les mots réduits sont ici exactement les mots ne contenant pas le mot 03.

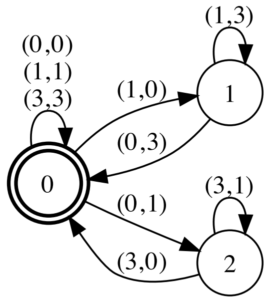

FIGURE 2. Automate reconnaissant les relations du semi-groupe.

On voit sur l'automate de la figure 2 que les relations du semi-groupe Γ s'obtiennent toutes à partir des relations $11^n0 = 03^n3$, par concaténation.

EXEMPLE 1.2. — *Le mot* $(1,0)(1,3)(0,3)$ *est reconnu par l'automate de la figure 2, et on a en effet la relation* $1 \circ 1 \circ 0 = 0 \circ 3 \circ 3$*, puisque l'on a l'égalité*

$$\frac{\frac{\frac{x}{3}}{3}+1}{3}+1 = \frac{\frac{\frac{x}{3}+3}{3}+3}{3}.$$

Deux mots $u_1 ... u_n$ et $v_1 ... v_n$ en les générateurs $\{0,1,3\}$ représentent le même élément du semi-groupe si et seulement si le mot $(u_1, v_1)...(u_n, v_n)$ est reconnu par l'automate de la figure 2.

L'automate de la figure 1 fournit un moyen de connaître le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n donnée : celui-ci est en effet égal au nombre de chemins de longueur n de l'état initial 0 vers les états finaux 0 et 1. Ceci est donné par la somme des deux premiers coefficients des puissances de la matrice d'adjacence du graphe :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, on voit que le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n est exactement f_{2n+2}, où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonnacci :

$$\begin{aligned} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n. \end{aligned}$$

En particulier, le nombre d'éléments du semi-groupe de longueur n est asymptotiquement

$$c\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)^n + O\left(\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$