

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN PRODUIT D'INTERSECTION NON BORNÉ DANS LA K-HOMOLOGIE DES PSEUDOVARIÉTÉS

Michel Hilsum

**Tome 142
Fascicule 2**

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 177-192

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 142, juin 2014

Comité de rédaction

Jean BARGE	Daniel HUYBRECHTS
Gérard BESSON	Yves LE JAN
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Laure SAINT-RAYMOND
Jean-François DAT	Wilhelm SCHLAG
Charles FAVRE	
Raphaël KRIKORIAN (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € (\$ 519)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2014

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

UN PRODUIT D'INTERSECTION NON BORNÉ DANS LA K-HOMOLOGIE DES PSEUDOVARIÉTÉS

PAR MICHEL HILSUM

RÉSUMÉ. — Une relation en K-théorie bivariante entre l'opérateur de signature de J. Cheeger sur une pseudovariété admissible et celui sur l'espace total d'un fibré vectoriel réel orienté est établie grâce à un calcul de produit intersection de cycles non bornés. Ceci permet de montrer en corollaire l'égalité entre les classes caractéristiques à la Fulton et les $\mathcal{L}$ -classes de Goresky-MacPherson pour un ensemble analytique complexe localement complète intersection.

ABSTRACT (*An unbounded intersection product in pseudomanifold K-homology*)

A cup-product in unbounded bivariant K -theory is computed relating the signature operator on an admissible pseudomanifold defined by J. Cheeger with the total space of an oriented vector bundle on it. As a result, equality between Fulton characteristic classes and Goresky-MacPherson $\mathcal{L}$ -classes for an analytic set locale complete intersection is established.

Texte reçu le 17 octobre 2011 et accepté le 1^{er} mars 2013.

MICHEL HILSUM, UMR 7586 du CNRS, case 7012, bâtiment Sophie Germain, 5, rue Thomas Mann, 75205 Paris Cedex 13

Classification mathématique par sujets (2000). — 14C17, 19K35, 32C18, 32S60, 46L80, 46L85, 57R20, 58K65.

Mots clefs. — K-théorie bivariante, produit intersection, pseudovariété, classes caractéristiques, localement complète intersection.

Introduction

La K-théorie bivariante de G. G. Kasparov peut se calculer à partir d'opérateurs non bornés et à résolvante compacte [18, 2]. Cette formulation est très utile pour calculer de éléments de K-théorie à partir d'opérateurs différentiels sur des variétés singulières ou non différentielles, et pour lesquelles il n'y a pas de calcul pseudodifférentiel. Le produit intersection externe s'exprime très simplement à partir de cycles non bornés [2].

Mais le calcul du produit intersection dans la forme la plus générale, fondamental dans la K-théorie bivariante, s'avère très compliqué en théorie non bornée. Il n'y a même pas de preuve directe de l'existence du produit intersection en non borné.

Cependant, D. Kucerovsky a dégagé des critères utiles permettant de caractériser ce produit intersection [19]. Mais, aucun exemple non trivial n'a à ce jour été calculé.

Dans ce travail, nous nous proposons d'expliciter un produit intersection de cycles non bornés, qui utilise les critères de [19] : soit V une pseudovariété orientée, semi-linéaire sans bord et admissible au sens de J. Cheeger [6]. Par les travaux de J. Cheeger [6] et de H. Moscovici et F.B. Wu [21], il y a un opérateur de signature autoadjoint et à résolvante compacte sur la partie régulière de V et qui détermine un élément Σ_V du groupe de K-homologie analytique $K_0(V) := KK(C_0(V), \mathbb{C})$.

Soit $E \rightarrow V$ un fibré vectoriel réel orienté sur V : alors l'espace total de E est lui-même une pseudovariété orientée, admissible et donc admet aussi une classe $\Sigma_E \in K_0(C_0(E))$. Si V est une variété, alors Σ_E est le produit intersection de $p_\sigma \in KK(C_0(E), C_0(V))$ avec Σ_V , où p_σ est donné par la famille des opérateurs de signature sur les fibres de E .

L'objet de ce travail est de montrer l'analogue de cette formule pour une pseudovariété admissible (théorème 4.4).

En conséquence de ce résultat, nous établissons une égalité entre deux définitions des $\mathcal{L}$ -classes pour un sous-espace analytique complexe $V \subset W$ d'une variété complexe qui est une locale complète intersection.

Généralisant une construction de R. Thom, M. Goresky et R. Mac Pherson [11] ont montré l'existence des $\mathcal{L}$ -classes dans l'homologie singulière rationnelle d'une pseudovariété stratifiée n'ayant pas de strates de codimension impaire. Cette construction est une conséquence de l'homologie d'intersection et reste valable pour un espace de Witt [25].

La deuxième définition est directement inspirée de celle de W. Fulton pour les classes de Chern et provient des $\mathcal{L}$ -classes de F. Hirzebruch du fibré vectoriel N normal à V dans W : la $\mathcal{L}$ -classe $\mathcal{L}^F(V)$ est alors l'image de la $\mathcal{L}$ -classe du fibré tangent virtuel par l'homomorphisme de Poincaré $H^*(V, \mathbb{Q}) \rightarrow H_*(V, \mathbb{Q})$ donné

par la classe fondamentale V dont l'existence a été montrée par A. Haefliger et F. Hirzebruch [3].

C'est l'égalité de ces $\mathcal{L}$ -classes est établie dans le théorème 7.3.

La démonstration passe par l'identification respective de chacune de ces classes avec l'image par le caractère de Chern en K-homologie de Σ_V . L'égalité de $\text{ch } \Sigma_V$ avec les $\mathcal{L}$ -classes de [11] est établie par [6, 21].

Notons que l'image par le caractère de Chern en K-homologie de Σ_V pourrait constituer une troisième définition de la $\mathcal{L}$ -classe. Cette approche a l'avantage de ne pas requérir les conditions de transversalité.

L'égalité de $\text{ch } \Sigma_V$ avec les classes *à la* Fulton utilise la déformation au cône normal de R. MacPherson [10] qui a été défini pour pallier l'absence en général de voisinage tubulaire de V dans W . Cette déformation au cône normal comprend un cobordisme entre la fibre en 0 de la déformation (qui contient N) et W .

L'opérateur de signature sur N est alors cobordant au sens de [16, 17] à la signature sur W . Notre formule de produit intersection conduit alors à retrouver l'opérateur de signature sur V à partir de celui sur N , ce qui permet de conclure.

1. Pseudovariétés stratifiées

Dans toute la suite, une *pseudovariété* de dimension n est un complexe simplicial localement fini V qui vérifie les conditions de [26, page 150] : il est en particulier la réunion de ses n -simplexes et tout $(n-1)$ -simplexe est face d'au plus deux n -simplexes. Le complémentaire $V^\infty \subset V$ du squelette de codimension deux du complexe est alors une variété semi-linéaire.

Le bord ∂V de la pseudovariété est la réunion des $(n-1)$ -simplexes qui sont la face d'un seul n -simplexe. La pseudovariété est donc sans bord si tout $(n-1)$ -simplexe est la face d'exactement deux n -simplexes.

Une *pseudovariété stratifiée* de dimension n se définit par récurrence sur la dimension : en dimension 0, c'est une famille discrète de points et pour $n \geq 0$, c'est une pseudovariété (au sens précédent) V filtré par des sous-complexes :

$$\emptyset \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

avec $V_{n-1} = V_{n-2}$ et où $V_k - V_{k-1}$ est une variété différentielle (*i.e.*, C^∞) de dimension k , et tel que pour tout $x \in V_k - V_{k-1}$, il existe un voisinage U de x dans $V_k - V_{k-1}$ et un voisinage $\mathcal{O}$ de x dans V , une pseudovariété stratifiée L de dimension $n-k-1$ et un isomorphisme stratifié de $\mathcal{O}$ avec $U \times C(L)$ où $C(L) = L \times [0, 1] / L \times \{0\}$ est le cône associé ; L est appelé le *lien* de x . Précisons qu'une pseudovariété stratifiée est en particulier un ensemble stratifié au sens de [23], et qu'un isomorphisme stratifié est ici un homéomorphisme semi-linéaire qui envoie strate sur strate et de classe C^∞ sur chaque strate. Enfin le cône