Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PURETÉ DES FIBRES DE SPRINGER AFFINES POUR GL_4

Zongbin Chen

Tome 142
Fascicule 2

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 193-222

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 142, juin 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (2), 2014, p. 193–222

PURETÉ DES FIBRES DE SPRINGER AFFINES POUR GL_4

PAR ZONGBIN CHEN

RÉSUMÉ. — Pour GL_4 et $\gamma \in \mathfrak{gl}_4(F)$ un élément semi-simple régulier non-ramifié entier, la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ admet un pavage en espaces affines, donc sa cohomologie est « pure ».

ABSTRACT (*Purity of affine Springer fibers for* GL_4). — The affine Springer fiber corresponding to GL_4 and regular semi-simple integral split element admits an affine paving, so its cohomology is "pure".

1. Introduction

Soit k un corps algébriquement clos. On note $F = k((\epsilon))$ le corps de séries de Laurent sur k, $\mathcal{O} = k[[\epsilon]]$ son anneau d'entier, $\mathfrak{p} = \epsilon k[[\epsilon]]$ son idéal maximal. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, et val : $\overline{F} \to \mathbf{Q}$ la valuation discrète normalisée par $\mathrm{val}(\epsilon) = 1$. Soient $G = \mathrm{GL}_d$, T le tore maximal des matrices diagonales, B le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures de G. On notera leur algèbre de Lie par la lettre gothique correspondante. Soient $K = G(\mathcal{O})$, I le sous-groupe d'Iwahori standard de $G(F)$, i.e. il est l'image inverse de B sous la réduction $G(\mathcal{O}) \to G(k)$. Les groupes $G(F)$, K, I sont

Texte reçu le 14 novembre 2011 et accepté le 14 juin 2012.

ZONGBIN CHEN, Département de mathématiques, Bât. 425, Université Paris-sud 11, 91405 Orsay-Cedex, France • *E-mail :* `zongbin.chen@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E67 ; 22E35.

Mots clefs. — Grassmannienne affine, fibre de Springer affine, pavage affine, pureté cohomologique.

muni des structures de ind-k-schéma en groupe. On note $\mathscr{X} = G(F)/K$ la grassmannienne affine, c'est un ind-k-schéma qui classifie les réseaux dans F^d :

$$\mathscr{X} = \{L \subset F^d \mid L \text{ est un } \mathscr{O}\text{-module de type fini tel que } L \otimes F = F^d\}.$$

Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier. La fibre de Springer affine

$$\mathscr{X}_\gamma = \{g \in G(F)/K \mid \mathrm{Ad}(g^{-1})\gamma \in \mathfrak{g}(\mathscr{O})\}$$

a été introduite par Kazhdan et Lusztig dans [4]. C'est un sous-schéma fermé localement de type fini et de dimension finie de $\mathscr{X}$, qui est non-vide si et seulement si γ est *entier* (i.e. ses valeurs propres sont entières dans $\overline{F}$). Elle est utilisée par Goresky, Kottwitz et Macpherson dans [1] pour montrer le lemme fondamental de Langlands-Shelstad, sous l'hypothèse suivante :

Conjecture 1.1 (Goresky-Kottwitz-Macpherson). — Soit $\gamma \in \mathfrak{g}(F)$ un élément semi-simple régulier entier, la cohomologie de la fibre de Springer affine $\mathscr{X}_\gamma$ est pure au sens de Grothendieck-Deligne.

Dans [2], Goresky, Kottwitz et Macpherson ont montré cette conjecture pour γ équivalué. L'élément γ est dit *équivalué* si $\mathrm{val}(\alpha(\gamma))$ ne dépend pas de la racine α de G sur $\overline{F}$ par rapport à $Z_\gamma(G)$. Pour cela, ils ont construit un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$. Pour une variété X sur k, un *pavage en espaces affines* de X est une filtration croissante exhaustive $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ de X telle que X_i est fermé et $X_i \backslash X_{i-1}$ est isomorphe à un espace affine standard, $\forall i$. Dans le cas où $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathscr{O})$ est équivalué, un tel pavage est obtenu en intersectant $\mathscr{X}_\gamma$ avec le pavage de Bruhat-Tits.

Mais pour $\gamma \in \mathfrak{t}(\mathscr{O})$ non-équivalué, les intersections $\mathscr{X}_\gamma \cap IvK/K$ sont en général singulières. Un exemple typique est le suivant.

Exemple 1.1. — Soit $G = \mathrm{GL}_3$, $\gamma = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & & \\ & \epsilon^4 & \\ & & -\epsilon^4 \end{pmatrix}$. Pour $v \in \mathbf{Z}^3$, on note $\epsilon^v = \begin{pmatrix} \epsilon^{v_1} & & \\ & \epsilon^{v_2} & \\ & & \epsilon^{v_3} \end{pmatrix}$ et $C(v) = I\epsilon^v K/K$. On a

$$C(0,2,-2) = \begin{bmatrix} 1 & & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix} \epsilon^v K/K.$$

En utilisant la coordonné

$$\begin{bmatrix} 1 & & a_0+a_1\epsilon \\ b_1\epsilon & 1 & \sum_{i=0}^{3} c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} 1 & & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^2 \\ \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 & 1 & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^4 \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

on trouve que l'intersection $\mathscr{X}_\gamma \cap IvK/K$ est la sous-variété de $\mathbf{A}^7$ définie par l'équation

$$a_0 b_1 = 0.$$

Lucarelli a construit dans [5] un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}_\gamma$ pour PGL_3. Il part d'un pavage en espaces affines de $\mathscr{X}$ qui est différent de celui de Bruhat-Tits. Dans notre exemple pour GL_3, Lucarelli rassemble le pavé singulier $C(0,2,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma$ et le pavé lisse $C(1,1,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma$, et redécoupe la réunion de ces deux pavés en utilisant la décomposition de Bruhat-Tits pour l'Iwahori

$$I' = \mathrm{Ad}(\mathrm{diag}(1,\epsilon^2,\epsilon^2))I.$$

Le pavé singulier $C(0,2,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma$ sera coupé en 2 parties. D'une part on a la branche $b_1 = 0$, qui est isomorphe à $\mathbf{A}^6$, d'autre part, on a la branche $b_1 \neq 0$, $a_0 = 0$, qui est isomorphe à $\mathbb{G}_m \times \mathbf{A}^5$. Cette dernière sera réunit avec la cellule $C(1,1,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma$ pour former l'espace affine $\mathbf{A}^6$, ce que on peut voir dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1 & & a_1\epsilon \\ b_1\epsilon & 1 & \sum_{i=0}^{3} c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \epsilon^2 & \\ & & \epsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K \\ &= \begin{bmatrix} 1 & b_1^{-1}\epsilon^{-1} & a_1\epsilon - b_1^{-1}c_3\epsilon^2 \\ & 1 & \sum_{i=0}^{2} c_i\epsilon^i \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K,\end{aligned}$$

et

$$C(1,1,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K.$$

Donc la branche $b_1 \neq 0$, $a_0 = 0$ et la cellule $C(1,1,-2)\cap\mathscr{X}_\gamma$ se rassemblent en l'espace affine

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathfrak{p}^{-1}/\mathscr{O} & \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^3 \\ & 1 & \mathscr{O}/\mathfrak{p}^3 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon & & \\ & \epsilon & \\ & & \epsilon^{-2} \end{bmatrix} K/K \cong \mathbf{A}^6.$$