Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA

Pascal Boyer

Tome 142
Fascicule 4

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 777-814

Bull. Soc. math. France
142 (4), 2014, p. 777–814

FILTRATIONS DE STRATIFICATION DE QUELQUES VARIÉTÉS DE SHIMURA SIMPLES

PAR PASCAL BOYER

RÉSUMÉ. — Nous définissons et étudions de nouvelles filtrations dites de stratification d'un faisceau pervers sur un schéma; contrairement au cas de la filtration par les poids, ou de monodromie, ces filtrations sont valables quel que soit l'anneau Λ de coefficients. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, nous illustrons ces constructions dans le contexte des variétés de Shimura unitaires simples de [7] pour les faisceaux pervers d'Harris-Taylor et le complexe des cycles évanescents introduits et étudiés dans [2]. Nous montrons aussi comment utiliser ces filtrations afin de simplifier l'étape principale de [2]. Les cas de $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ et $\overline{\mathbb{F}}_l$ seront étudiés dans un prochain article.

ABSTRACT (*Filtration of stratification of some simple Shimura varieties*)
We define and study new filtrations called of stratification of a perverse sheaf on a scheme; beside the cases of the weight or monodromy filtrations, these filtrations are available whatever are the ring of coefficients. For $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_l$, we illustrate these constructions in the geometric situation of the simple unitary Shimura varieties of [7] for the perverse sheaves of Harris-Taylor and the complex of vanishing cycles introduced and studied in [2]. We also show how to use these filtrations to simplify the principal step of [2]. The cases of $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_l$ and $\overline{\mathbb{F}}_l$ will be studied in another paper.

Texte reçu le 3 septembre 2012, révisé le 18 février 2014, accepté le 5 mai 2014.

PASCAL BOYER, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse (France) • *E-mail :* `boyer@math.univ-paris13.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11G10, 11G18, 18E40, 18A20.

Mots clefs. — Faisceaux pervers, catégorie quasi-abélienne, filtration de stratification, théories de torsion, variétés de Shimura, cycles évanescents, systèmes locaux d'Harris-Taylor.

Introduction

Pour $l \neq p$ deux nombres premiers distincts, dans [2] nous avons explicité le faisceau pervers des cycles évanescents à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'une certaine classe de variétés de Shimura unitaires X qualifiée de « simple » dans [7], en une place de caractéristique résiduelle p. Rappelons que cette description ne repose pas sur une étude géométrique de ces variétés qui consisterait à se ramener à une situation semi-stable ; pour l'essentiel les arguments se ramènent à de la combinatoire sur les représentations admissibles des groupes linéaires sur un corps local et automorphes d'un groupe symplectique sur un corps de nombres. Au cœur de ces arguments, on trouve la formule des traces de Selberg qui calcule la somme alternée des groupes de cohomologie de certains systèmes locaux dits d'Harris-Taylor, introduits dans [7], et définis sur certaines strates de la fibre spéciale de ces variétés de Shimura. L'apport principal de [2] est l'étude des prolongements de ces systèmes locaux à toute la fibre spéciale. Pour l'essentiel la preuve consiste

- à décrire, dans un certain groupe de Grothendieck des faisceaux pervers de Hecke, les images des extensions par zéro des systèmes locaux d'Harris-Taylor puis d'en déduire celle du faisceau pervers $\Psi_{\mathcal{I}}$ des cycles évanescents.
- Ensuite on étudie la suite spectrale associée à la filtration par les poids de $\Psi_{\mathcal{I}}$, calculant ses faisceaux de cohomologie.

Un fait remarquable est que, pour des raisons combinatoires, cette suite spectrale dégénère nécessairement en E_2 et l'étape la plus complexe consiste à montrer que, lorsque ce n'est pas trivialement faux, les $d_1^{p,q}$ sont non nulles. Pour ce faire, on utilise

- soit, cf. [2], une propriété d'autodualité à la Zelevinsky sur la cohomologie des espaces de Lubin-Tate qui passe par un théorème difficile de comparaison avec l'espace de Drinfeld dû à Faltings et développé par Fargues dans [6] ;
- soit, cf. [3], des arguments combinatoires complexes reposant sur le théorème de Lefschetz difficile, à propos la cohomologie de la variété de Shimura.

Une autre façon de voir ces calculs est de considérer la filtration par les noyaux itérés de la monodromie auquel cas la suite spectrale associée, calculant les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i\Psi_{\mathcal{I}}$, dégénère en E_1. Cette observation nous suggère une stratégie pour montrer que ces $\mathcal{H}^i\Psi_{\mathcal{I}}$ sont sans torsion : il suffirait

- de construire une filtration entière de $\Psi_{\mathcal{I}}$ qui coïnciderait sur $\overline{\mathbb{Q}}_l$ avec celle par les noyaux itérés de la monodromie puis

– de montrer que les faisceaux de cohomologie de ces gradués sont sans torsion.

Le point de départ de ce travail est donc de construire un telle filtration entière, l'étude de la torsion des $\mathscr{H}^i\Psi_{\mathscr{I}}$ étant repoussée à un prochain article.

L'idée la plus naturelle pour qu'une telle filtration existe quels que soient les coefficients, est de lui trouver une nature géométrique et donc d'utiliser des stratifications de l'espace. Ainsi pour un faisceau pervers P sur un schéma muni d'une stratification quelconque, on le filtre au moyen des morphismes d'adjonction $j_!j^*P \to P$ et $P \to j_*j^*P$, cf. le §2. Pour $\Lambda = \mathbb{Z}_l$, on travaille dans la catégorie quasi-abélienne des faisceaux pervers « libres », cf. le §1.3 au sens où étant donné un faisceau pervers « libre », on lui associe une filtration dont les gradués sont « libres ». Pour ce faire on est amené à prendre les coimages, et non les images, des morphismes d'adjonction. Nous verrons dans un prochain papier que ce phénomène qu'il est naturel de nommer « saturation », est directement lié à la torsion. On étudie, §2.3, plus particulièrement deux de ces constructions, la première dite filtration exhaustive de stratification et la deuxième qui lui est duale, la cofiltration exhaustive de stratification.

Au §3, on explicite ces constructions pour les extensions par zéro des $\overline{\mathbb{Q}}_l$-systèmes locaux d'Harris-Taylor, §3.3, puis §3.4 pour le $\overline{\mathbb{Q}}_l$-faisceau pervers des cycles évanescents $\Psi_{\mathscr{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$. En particulier on vérifie que la filtration de stratification de $\Psi_{\mathscr{I},\overline{\mathbb{Q}}_l}$ est égale à celle par les noyaux de la monodromie, alors que la cofiltration coïncide à celle par les images.

Rappelons que l'un des intérêts de cet article est de fournir l'ingrédient théorique pour contrôler la torsion des faisceaux de cohomologie de $\Psi_{\mathscr{I}}$. Nous montrerons dans un prochain travail que cette torsion est toujours nulle ce qui, par le théorème de Berkovich couplé à l'analogue du théorème de Serre-Tate, montre que la cohomologie des espaces de Lubin-Tate, cf. [2], est sans torsion et non divisible. Afin d'illustrer les techniques qui seront développées dans ce prochain papier, nous montrons en appendice, comment d'une part obtenir la filtration de stratification de $\Psi_{\mathscr{I}}$ à partir seulement des arguments de somme alternée de [2], puis comment en déduire les $\mathscr{H}^i\Psi_{\mathscr{I}}$.

La lisibilité du texte doit beaucoup à la relecture précise et aux suggestions de J.-F. Dat qui, en particulier, m'a incité à utiliser le langage des catégories quasi-abéliennes ; je l'en remercie vivement. Merci enfin à D. Juteau pour m'avoir expliqué son travail sur les faisceaux pervers à coefficients entiers.

1. Faisceaux pervers entiers et théories de torsion

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désignera une extension finie de $\mathbb{Q}_l$ ou $\overline{\mathbb{Q}}_l$, d'anneau des entiers $\mathbb{O}$ et de corps résiduel $\mathbb{F} = \mathbb{O}/(\varpi)$. La lettre Λ désignera une des trois lettres $\mathbb{K}, \mathbb{O}$ ou $\mathbb{F}$.

1.1. Théories de torsion. — Une théorie de torsion, cf.[10, définition 2.7], sur une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ est un couple $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ de sous-catégories pleines tel que :

- pour tout objet T dans $\mathscr{T}$ et L dans $\mathscr{F}$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T, L) = 0$;
- pour tout objet A de $\mathscr{A}$, il existe des objets $A_{\mathscr{T}}$ et $A_{\mathscr{F}}$ de respectivement $\mathscr{T}$ et $\mathscr{F}$, ainsi qu'une suite exacte courte $0 \to A_{\mathscr{T}} \longrightarrow A \longrightarrow A_{\mathscr{F}} \to 0$.

Remarque. — $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{F}$) est stable par quotients et extensions (resp. sous-objets et extensions). On dira de $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ est une théorie de torsion *héréditaire* (resp. *co-héréditaire*) si $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{F}$) est stable par sous-objets (resp. par quotients).

Dans une catégorie abélienne $\mathscr{A}$ qui est $\mathbb{O}$-linéaire, un objet A de $\mathscr{A}$ est dit de ϖ-torsion (resp. ϖ-libre, resp. ϖ-divisible) si $\varpi^N 1_A$ est nul pour un certain entier N (resp. $\varpi.1_A$ est un monomorphisme, resp. un épimorphisme).

1.1.1. Proposition (cf. [10] 2.14). — *Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne $\mathbb{O}$-linéaire; on note $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{F}$, resp. Q) la sous-catégorie pleine des objets de ϖ-torsion (resp. ϖ-libres, resp. ϖ-divisibles) de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ est noethérienne (resp. artinienne) alors $(\mathscr{T}, \mathscr{F})$ (resp. $(Q, \mathscr{T})$) est une théorie de torsion héréditaire (resp. co-héréditaire) sur $\mathscr{A}$.*

Remarque. — Dans une catégorie abélienne $\mathbb{O}$-linéaire noethérienne (resp. artinienne) tout A admet un plus grand sous-objet de ϖ-torsion A_{tor} (resp. ϖ-divisible A_{div}) : A/A_{tor} (resp. A/A_{div}) est sans ϖ-torsion (resp. de ϖ-torsion) et $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}(A/A_{tor})$ (resp. $\mathbb{K}A \simeq \mathbb{K}A_{div}$).

1. Notations. — *Soit $\mathscr{D}$ une catégorie triangulée munie d'une t-structure $(\mathscr{D}^{\leq 0}, \mathscr{D}^{\geq 0})$ au sens de [1] définition 1.3.1; on notera $\mathscr{C}$ son cœur, $\tau_{\leq n}$ et $\tau_{\geq n}$, les foncteurs de troncation ainsi que $\mathscr{H}^n := \tau_{\leq n}\tau_{\geq n} = \tau_{\geq n}\tau_{\leq n}$. Pour $T : \mathscr{D}_1 \longrightarrow \mathscr{D}_2$ un foncteur triangulé, on note ${}^pT$ pour $\mathscr{H}^0 \circ T \circ \epsilon_1$, où $\epsilon_1 : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}_1$ est l'inclusion du cœur.*