Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE FEUILLETÉ. PHÉNOMÈNES DE HARTOGS-SEVERI ET BOCHNER POUR DES FEUILLETAGES CR SINGULIERS

Gennadi Henkin & Vincent Michel

Tome 142
Fascicule 1

2014

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 95-125

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 142, janvier 2014

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 300 €, hors Europe : 334 € ($ 519)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
142 (1), 2014, p. 95–125

PROBLÈME DE PLATEAU COMPLEXE FEUILLETÉ. PHÉNOMÈNES DE HARTOGS-SEVERI ET BOCHNER POUR DES FEUILLETAGES CR SINGULIERS

PAR GENNADI HENKIN & VINCENT MICHEL

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de généraliser géométriquement des théorèmes de Severi, Brown et Bochner portant sur le prolongement analytique des fonctions réelles analytiques qui sont holomorphes par rapport à l'une de leurs variables. Nous établissons en particulier que si N est un anneau Lévi-plat réel analytique d'un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$, il est possible de trouver $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$ tel que $\mathscr{X} \cup N$ soit un sous-ensemble réel analytique qui remplisse N au sens où le bord du courant d'intégration porté par $\mathscr{X}$ est une sous-variété lisse de N feuilletée par des courbes réelles. En outre, les fonctions réelles analytiques sur N dont les restrictions aux feuilles complexes sont harmoniques se prolongent à $\mathscr{X}$ en fonction du même type. Nous donnons aussi un théorème quand le bord prescrit est un cycle.

ABSTRACT (*Foliated complex Plateau problem. Hartogs-Severi and Bochner phenomenon for singular CR foliations*)

The purpose of this paper is to generalise in a geometric setting theorems of Severi, Brown and Bochner about analytic continuation of real analytic functions which are holomorphic or harmonic with respect to one of its variables. We prove in particular that if N is a real analytic levi-flat annulus in an open set of $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$, then one can find $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^2$ such that $\mathscr{X} \cup N$ is a levi-flat real analytic subset and $\mathscr{X}$ fills N in the sense that the boundary of the integration current of $\mathscr{X}$ is a prescribed smooth submanifold of N foliated by real curves. Moreover, real analytic functions on N whose

Texte reçu le ??? et accepté le ???.

GENNADI HENKIN • *E-mail :* `henkin@math.jussieu.fr`, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France. CEMI, Academy of Science, Moscow, Russia
VINCENT MICHEL • *E-mail :* `michel@math.jussieu.fr`, Université Pierre et Marie Curie, Paris

Classification mathématique par sujets (2000). — 32D15, 32C25, 32V15, 35R30, 58J32.

Mots clefs. — Problème de Plateau complexe feuilleté, phénomène de Severi-Brown-Bochner, fonction de Green, feuilletage singulier.

restrictions to complex leaves are harmonic extend to $\mathcal{X}$ in functions of the same kind. We give also a theorem when the prescribed boundary is a cycle.

1. Enoncés

Lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}$ dont le bord est lisse et connexe, on sait depuis les travaux de Sohotsky en 1873 qu'une fonction u définie et continue sur le bord γ de Ω se prolonge holomorphiquement à Ω si et seulement si elle vérifie la condition des moments, à savoir que

$$\int_\gamma hudz = 0$$

pour toute fonction entière h. Une version géométrique et plus générale de ce résultat est établie dans [30], [19, th. 4.2] et [7, th. 4] : étant donné un couple (γ, μ) où γ est une courbe réelle orientée connexe de $\mathbb{C}^n$ satisfaisant une hypothèse de régularité très faible et μ une mesure sur γ, l'annulation de tous les moments de μ sur γ, c'est à dire

$$\forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)\,,\ \int_\gamma hd\mu = 0 \tag{1}$$

caractérise l'existence d'une courbe complexe[(1)] $\mathcal{X}$ de volume fini dont γ est le bord au sens des courants et d'une $(1,0)$-forme holomorphe φ sur $\mathcal{X}$ dont μ est la valeur au bord, c'est à dire vérifie au sens des courants $d([\mathcal{X}] \wedge \varphi) = \mu$, $[\mathcal{X}]$ étant le courant d'intégration sur $\mathcal{X}$ et μ étant identifiée à son extension simple à $\mathbb{C}^n$. Précisons que $\mathcal{X}$ n'étant pas forcément lisse, une $(1,0)$-forme (faiblement) holomorphe φ sur $\mathcal{X}$ est localement la restriction à $\mathcal{X}$ d'une $(1,0)$-forme méromorphe $\widetilde{\varphi}$ telle que $\overline{\partial}([\mathcal{X}] \wedge \widetilde{\varphi}) = 0$.

Il s'avère que la condition des moments gouverne aussi la possibilité de réaliser un triplet (γ, u, α) où $u \in C^1(\gamma)$ et $\alpha \in C^1\left(\gamma, \Lambda^{1,0}T^*\mathbb{C}^n\right)$ comme une donnée de Cauchy du Laplacien d'une courbe complexe $\mathcal{X}$ à construire dans $\mathbb{C}^n$ que γ borderait. Lorsque $\mathcal{X}$ est une surface de Riemann ouverte bordée par γ au sens des variétés à bord, une telle donnée est un triplet (γ, u, α) comme ci-dessus avec la condition que α est la valeur au bord du courant $\partial\widetilde{u}$ où $\widetilde{u}$ est le prolongement harmonique de u à $\mathcal{X}$. Dans cette situation, α peut être exprimée à partir de l'opérateur de Dirichlet-à-Neumann $N_{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$, c'est à dire de l'opérateur qui à $u \in C^1(\gamma, \mathbb{R})$ associe $\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\nu}|_\gamma$ où $\widetilde{u}$ est le prolongement harmonique de u à $\mathcal{X}$ et ν est le champ de vecteurs unitaires qui dirigent le long de γ la normale extérieure à $\mathcal{X}$. En effet, si on désigne par τ le champ

(1) Une courbe complexe est dans cet article un ensemble (complexe) analytique de dimension 1 et une surface de Riemannn est une courbe complexe lisse et connexe.

des vecteurs tangents à γ tel qu'en chaque point x de γ, (ν_x, τ_x) soit une base orthonormée directe de $T_x \mathscr{X}$, si on note (ν^*, τ^*) la duale de (ν, τ) et si pour $u \in C^1(\gamma)$ on pose

$$L_{\mathscr{X}} u = \frac{1}{2} (N_{\mathscr{X}} u - iTu)$$

où T désigne la dérivation par rapport à τ, alors

$$\forall u \in C^1(\gamma), \ \partial \widetilde{u}\,|_\gamma = (L_{\mathscr{X}} u) (\nu^* + i\tau^*) .$$

Pour qu'un triplet (γ, u, α) puisse être une donnée de Cauchy, α doit donc être de la forme $\frac{1}{2}(u' - iTu)(\nu^* + i\tau^*)$ où $u' \in C^0(\gamma)$, condition qui garde un sens même lorsque l'existence même de $\mathscr{X}$ n'est pas connue pour peu que γ soit plongée dans une variété complexe car ν^* peut être alors défini a priori de façon naturelle. Une donnée de Cauchy étant ainsi posée dans $\mathbb{C}^n$, le problème de construire à la fois $\mathscr{X}$ et un prolongement harmonique à la fonction donnée sur γ s'inscrit dans le problème de reconstruire une surface de Riemann à partir de son opérateur de Dirichlet-à-Neumann. Dans le cas général, il est naturel qu'une courbe complexe $\mathscr{X}$ bordée par une courbe réelle présente des singularités et la notion de fonction harmonique doit être étendue pour que le problème précédent garde un sens.

Par définition, une fonction harmonique sur une courbe complexe $\mathscr{X}$ est une fonction u qui est harmonique au sens usuel sur la partie régulière Reg $\mathscr{X}$ de $\mathscr{X}$ et faiblement harmonique sur $\mathscr{X}$, ce qui signifie que ∂u est faiblement holomorphe. Une fonction u est dite harmonique multivaluée sur $\mathscr{X}$ si elle admet le long de tout chemin tracé dans la partie régulière de $\overline{\mathscr{X}}$ une détermination en fonction harmonique usuelle et si ∂u est une $(1,0)$-forme faiblement holomorphe (univaluée) sur $\mathscr{X}$.

La proposition 1 est une sorte de complément au théorème 3c de [17] quand un plongement dans un espace affine complexe est imposé :

Proposition 1 (Sur un problème de Plateau complexe)

On considère dans $\mathbb{C}^n$ une courbe réelle γ lisse, orientée, compacte et connexe. On fixe des champs de vecteurs ν et τ définis sur γ et de classe C^1 tels que pour tout $x \in \gamma$, (ν_x, τ_x) est orthonormée et τ_x définit l'orientation de γ en x. On note $z \mapsto z^*$ l'isomorphisme de $\mathbb{C}^n$ sur son dual naturellement associé à sa structure hermitienne standard. On se donne alors des fonctions $u \in C^1(\gamma, \mathbb{R})$ et $u' \in C^0(\gamma, \mathbb{R})$ puis on pose $\alpha = \frac{1}{2}(u' - iTu)(\nu^* + i\tau^*) \in C^0\left(\gamma, \Lambda^{1,0} T^* \mathbb{C}^n\right)$. Si $\alpha \neq 0$, alors la condition

$$\forall h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n), \ \int_\gamma h\alpha = 0 \tag{2}$$