

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PÉRIODES ENTIÈRES DE GROUPES *p*-DIVISIBLES SUR UNE BASE GÉNÉRALE

Miaofen Chen

Tome 143

Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-33

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Comité de rédaction

Gérard BESSON	Daniel HUYBRECHTS
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Laure SAINT-RAYMOND
Pascal HUBERT	Wilhelm SCHLAG
Marc HERZLICH	

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

PÉRIODES ENTIÈRES DE GROUPES p -DIVISIBLES SUR UNE BASE GÉNÉRALE

PAR MIAOFEN CHEN

RÉSUMÉ. — Faltings a démontré un théorème de comparaison à coefficients entiers entre module de Tate et module de Dieudonné filtré des groupes p -divisibles sur un anneau de valuation discrète p -adique complet. Dans cet article, nous généralisons son résultat sur une base plus générale, plus précisément, sur une \mathbb{Z}_p -algèbre noethérienne, p -adiquement complète, normale, intègre et sans p -torsion.

ABSTRACT (*Integral periods of p -divisible groups over a general base*)

Faltings has proved a comparison theorem with integral coefficients between the Tate module and the filtered Dieudonné module of a p -divisible groups over a p -adic complete discrete valuation ring. In this paper, we generalise his result over a more general base, namely over a Noetherian, normal, integral, p -adically complete, p -torsion free \mathbb{Z}_p -algebra.

Texte reçu le 2 juin 2011, modifié le 14 février 2013 et le 5 septembre 2013, accepté le 3 mai 2014.

MIAOFEN CHEN, Department of Mathematics, Shanghai Key Laboratory of PMMP, East China Normal University, No. 500 Dong Chuan Road, Shanghai, 200241, P.R.China •
E-mail : mfchen@math.ecnu.edu.cn

Classification mathématique par sujets (2000). — 14L05.

Mots clefs. — Groupe p -divisible, théorie de Fontaine, théorème de comparaison.

1. Introduction

Soient $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation discrète, à corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$, et $K_0 := \text{Frac}(W(k))$ le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt de k . Fixons une clôture algébrique \overline{K} de K . Cela correspond à un point géométrique $\overline{\eta}$ de $\text{Spec}(K)$. Soit $\widehat{\overline{K}}$ le complété p -adique de \overline{K} . Notons $\Gamma_K = \text{Gal}(\overline{K}|K)$ le groupe de Galois. Posons \mathcal{O}_K (resp. $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, resp. $\mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$) l'anneau des entiers de K (resp. \overline{K} , resp. $\widehat{\overline{K}}$).

À tout groupe p -divisible X sur \mathcal{O}_K est associé

- le module de Tate $T_p(X_{\overline{\eta}})$ qui est un $\mathbb{Z}_p[\Gamma_K]$ -module ;
- l'isocrystal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X) = (D(X), \varphi, \text{Fil}^\bullet(D(X) \otimes_{K_0} K))$, où $(D(X), \varphi)$ est l'isocrystal de Dieudonné covariant de $X \otimes_{\mathcal{O}_K} k$ et

$$\text{Fil}^n(D(X) \otimes K) = \begin{cases} D(X) \otimes K & n \leq -1 \\ \omega_{X^\vee}[1/p] & n = 0 \\ 0 & n \geq 1 \end{cases}$$

où X^\vee est le dual de Cartier de X . L'espace cotangent $\omega_{X^\vee}[1/p]$ de X^\vee à valeur dans K peut être considéré comme un sous- \overline{K} -espace vectoriel de $D(X) \otimes_{K_0} K$ en utilisant l'algèbre de Lie de la suite exacte associée à l'extension universelle vectorielle $E(X)$ de X (cf. [13])

$$0 \rightarrow \omega_{X^\vee} \rightarrow \text{Lie } E(X) \rightarrow \text{Lie } X \rightarrow 0$$

et en identifiant $\text{Lie } E(X)[1/p]$ avec $D(X) \otimes_{K_0} K$.

Pour lier le module de Tate et l'isocrystal de Dieudonné filtré des groupes p -divisibles sur \mathcal{O}_K , Fontaine a construit l'anneau $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une K_0 -algèbre munie d'une action de Γ_K , d'un Frobenius φ et d'une \mathbb{Z} -filtration. En utilisant cet anneau $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$, le module de Tate rationnel $V_p(X_{\overline{\eta}}) = T_p(X_{\overline{\eta}})[1/p]$ et l'isocrystal de Dieudonné filtré $\underline{D}(X)$ se déterminent l'un et l'autre. Plus précisément, Fontaine a démontré dans [9] qu'il existe un isomorphisme de $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ -modules

$$(1) \quad V_p(X) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \xrightarrow{\sim} \underline{D}(X) \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$$

compatible aux filtrations, aux actions de φ et aux morphismes de Frobenius si on munit le membre de gauche du Frobenius $p \otimes \varphi$ et celui de droite de $\varphi \otimes \varphi$.

Faltings a généralisé le théorème de comparaison (1) en un énoncé à coefficients entiers. On utilise du coup $A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ qui est une sous- \mathcal{O}_{K_0} -algèbre de $B_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ stable sous Frobenius et l'action de Galois. Il existe une application surjective $\theta : A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$. Posons $\mathbb{E} := \text{Lie } E(\tilde{X})$ avec \tilde{X} un relèvement de $X \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}$ sur $A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$. Il s'agit de l'évaluation du cristal de Dieudonné covariant sur l'épaississement θ . Le $A_{\text{cris}}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ -module \mathbb{E} possède une \mathbb{N} -filtration,

une action de Frobenius semi-linéaire φ et une action de Galois Γ_K . Faltings a montré dans ([8] théorème 5) qu'il existe un isomorphisme de périodes

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

compatible à l'action de Γ_K . Le morphisme induit

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \rightarrow \mathbb{E}$$

est un homomorphisme de $(A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}), \varphi)$ -modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t , où $t \in A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$ tel que $\varphi(t) = pt$ et $t \in \mathrm{Fil}^1 A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}}) \setminus \mathrm{Fil}^2 A_{\mathrm{cris}}(\mathcal{O}_{\bar{K}})$.

Dans cet article, on généralise le théorème de comparaison de Faltings précédent en diminuant les hypothèses nécessaires sur la base. Plus précisément, on remplace la base \mathcal{O}_K par l'anneau R qui est une \mathbb{Z}_p -algèbre noethérienne, p -adiquement complète, normale, intègre et sans p -torsion. Fixons une clôture algébrique du corps des fractions $\mathrm{Frac}(R)$ de R . Soit \bar{R} la fermeture intégrale de R dans l'extension galoisienne maximale de $\mathrm{Frac}(R)$ étale au-dessus de $R[1/p]$. Alors \bar{R} joue un rôle parallèle à $\mathcal{O}_{\bar{K}}$. Soit $\widehat{\bar{R}}$ le complété p -adique de \bar{R} . On peut construire l'anneau de Fontaine $A_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}})$ de la même façon. Il est muni d'un Frobenius cristallin φ , d'une filtration et d'une action de

$$\Gamma := \mathrm{Gal}(\widehat{\bar{R}}/R) = \pi_1(\mathrm{Spec}(R[1/p]), \bar{\eta})$$

où $\bar{\eta}$ est le point géométrique au dessus du point générique associé au choix de la clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(R)$. De même, on a une application surjective :

$$\theta : A_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}}) \twoheadrightarrow \widehat{\bar{R}}.$$

THÉORÈME (4.1). — *Soit X un groupe p -divisible sur R . Supposons que $\mathrm{Lie} X$ et $\mathrm{Lie}(X^\vee)$ soient libres. Posons $\mathbb{E} := \mathrm{Lie} E(\tilde{X})$ avec \tilde{X} un relèvement de $X \otimes \bar{R}$ sur $A_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}})$.*

1. *Il existe un isomorphisme de périodes*

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^0 \mathbb{E}^{\varphi=p}$$

compatible à l'action de Γ .

2. *Le morphisme induit*

$$T_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} A_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}}) \rightarrow \mathbb{E}$$

est un homomorphisme de $(A_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}}), \varphi)$ -modules injectif, strictement compatible aux filtrations, et de conoyau annulé par t . En particulier, il existe un isomorphisme de $(B_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}}), \varphi)$ -modules filtrés

$$V_p(X_{\bar{\eta}}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\mathrm{cris}}(\widehat{\bar{R}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}[\frac{1}{pt}].$$