Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX

Emmanuel Ullmo & Andrei Yafaev

Tome 143
Fascicule 1

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 197-228

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 143, janvier 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (1), 2015, p. 197–228

NOMBRE DE CLASSES DES TORES DE MULTIPLICATION COMPLEXE ET BORNES INFÉRIEURES POUR LES ORBITES GALOISIENNES DE POINTS SPÉCIAUX

par Emmanuel Ullmo & Andrei Yafaev

Résumé. — Dans cet article nous donnons des bornes inférieures pour les nombres de classe de tores algébriques à multiplication complexe. Nous en déduisons des bornes inférieures pour la taille des orbites galoisiennes de points spéciaux (inconditionellement et sous l'hypothèse de Riemann généralisée).

Abstract (*Complex multiplication tori class number and inferior boundary of special point Galois orbits*)

In this paper we give lower bounds for class numbers of CM algebraic tori. We deduce lower bounds for the size of the Galois orbits of special points in Shimura varieties (unconditionally and under the Generalised Riemann Hypothesis).

1. Introduction

Ce papier est motivé par la conjecture d'André-Oort dont voici l'énoncé.

Conjecture 1.1 (André-Oort). — *Soit S une varieté de Shimura et soit $\Sigma \subset S$ un ensemble de points spéciaux. Alors les composantes irréductibles de l'adhérence de Zariski de Σ sont des sous-variétés spéciales de S.*

Texte reçu le 27 février 2012, accepté le 19 juillet 2013.

Emmanuel Ullmo, Université de Paris-Sud, Bat 425, 91405, Orsay Cedex France • *E-mail :* `ullmo@math.u-psud.fr`

Andrei Yafaev, University College London, Department of Mathematics, 25 Gordon street, WC1H OAH, London, United Kingdom • *E-mail :* `yafaev@math.ucl.ac.uk`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G18.

Cette conjecture a été récemment démontrée par Klingler et les deux auteurs [27], [14] en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée. La strategie consistait à combiner des méthodes galoisiennes et géométriques d'Edixhoven avec des techniques ergodiques de Clozel-Ullmo. Très récemment, Jonathan Pila a mis en place une stratégie faisant intervenir des idées issues de la logique pour attaquer la conjecture d'André-Oort [19], [21]. Cette nouvelle approche a déjà permi [20] de démontrer la conjecture d'André-Oort pour des produits de courbes modulaires de manière inconditionnelle. Qu'on adopte la stratégie d'Edixhoven ou celle de Pila, un des ingrédients majeurs est une borne inférieure suffisamment forte pour la taille des orbites sous Galois des points spéciaux des variétés de Shimura.

Il est à noter que la stratégie de Pila nécessite des meilleures bornes que celles requises par la méthode d'Edixhoven. La minoration de la taille des orbites sous Galois des points spéciaux obtenue dans [27] dépend de la validité de l'hypothèse de Riemann généralisée et est insuffisante pour les applications à la méthode de Pila. Notons que l'on ne sait pas à ce jour que sur l'espace de module $\mathbb{A}_g$ des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension $g \geq 4$ il n'y a qu'un nombre fini de points correspondants à des variétés abéliennes à multiplication complexe définies sur des extensions de $\mathbb{Q}$ de degré borné.

Le but principal de cet article est d'obtenir des minorations pour la taille des orbites sous Galois de point spéciaux utilisables dans la stratégie de Pila. Nous obtenons en toute généralité ces bornes sous l'hypothèse de Riemann généralisée et dans certains cas de manière inconditionnelle. Notons aussi qu'il n'est pas évident de prévoir exactement le type de bornes nécessaire pour la méthode de Pila mais nous pensons que celles que nous obtenons sont difficilement améliorables qualitativement et probablement adaptées aux applications en vue.

Un point spécial x d'une variété de Shimura définit un tore algébrique T sur $\mathbb{Q}$ et un corps de nombres CM $E = E(x, T)$, le corps reflex. On dispose alors d'un morphisme de tores algébriques sur $\mathbb{Q}$ dit de réciprocité

$$r = r_{x,T} : R_E := \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \to T.$$

Soit M un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$. Soit K_M^m le sous-groupe compact ouvert maximal de $M(\mathbb{A}_f)$. Le groupe de classes h_M de M est par définition le groupe fini

$$h_M = M(\mathbb{Q})\backslash M(\mathbb{A}_f)/K_M^m.$$

Le morphisme de réciprocité r induit au niveau des groupes de classes une application $\overline{r} : h_{R_E} \to h_T$ et l'orbite sous Galois du point spécial x est minorée par le cardinal de l'image de $\overline{r}$. Minorer la taille de l'orbite sous Galois de x revient donc à minorer le cardinal de l'image de $\overline{r}$.

La stratégie suivie dans ce papier est d'abord de minorer la taille du groupe de classes de T puis de borner la taille du conoyau de $\overline{r}$. Les bornes obtenues pour la taille de h_T sont inconditionnelles et ont la forme voulue. Nous pouvons minorer le conoyau de $\overline{r}$ quand le noyau de r est connexe de manière inconditionelle et obtenir les bornes voulues pour l'orbite de Galois de x dans ce cas. Nous donnons des critères assurant la connexité du noyau de r dans la section 4. Par exemple ce noyau est toujours connexe si x est un point spécial de $\mathbb{A}_g$ pour $g \leq 3$ ou si x est "Galois générique " pour g arbitraire.

Quand le noyau de r n'est pas connexe, l'estimation du conoyau de $\overline{r}$ semble être un problème sérieux de géométrie algébrique et de cohomologie galoisienne que nous n'avons pas su résoudre sans l'hypothèse de Riemann généralisée.

Précisons un peu la nature des résultats obtenus. Soit M un tore algébrique sur $\mathbb{Q}$ de dimension d. Soit L le corps de décomposition de M et D_L la valeur absolue de son discriminant. Notre but est de donner une borne inférieure pour h_M en fonction de D_L. Soit $X^*(M)$ le groupe de caractères de M et χ_M le caractère de la représentation d'Artin correspondante de $G = \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. On considère la fonction L d'Artin associée que l'on dénote $L(s, M)$ et ρ_M son quasi-résidu dont la définition est donnée à la section 2.1.2.

On définit ensuite le *quasi-discriminant* D_M de M. Il est défini comme le rapport entre deux mesures de Haar sur $M(\mathbb{A})$. La proposition 3.1 donne une formule fermée qui relie D_M au conducteur d'Artin $a(M)$ du module galoisien $X^*(M) \otimes \mathbb{Q}$ et au cardinal du groupe des composantes du modèle de Néron de type fini de M sur $\mathbb{Z}$. Shyr [25] montre la formule :

$$h_M R_M = w_M \tau_M \rho_M D_M^{1/2} \tag{1}$$

où w_M est la taille du 'groupe des unités de M', R_M le régulateur de M et τ_M le nombre de Tamagawa. Il est à noter que dans le cas du tore $M = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{mF}$ où F est un corps de nombres, on retrouve la formule classique pour le nombre de classes de l'anneau des entiers de F.

En explicitant et en évaluant les invariants arithmétiques de M intervenant dans la formule de Shyr (1) on montre que

$$h_M R_M \gg D_L^{\mu} \tag{2}$$

où les constantes ne dépendent que de d et sont explicites en fonction de d. La forme précise du résultat est donnée dans le théorème 2.3. Une fois la formule fermée pour D_M obtenue les résultats principaux sont une minoration de la forme voulue pour le conducteur d'Artin $a(M)$ (proposition 3.2) et une estimation de type Brauer-Siegel pour le quasi-résidu ρ_M (proposition 2.1). Il est à noter que dans le cas où M est un tore de multiplication complexe T le régulateur R_T est trivial et nous obtenons une minoration de h_T.