Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UN THÉORÈME LIMITE CENTRAL LOCAL EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE STATIONNAIRE DE CONDUCTANCES SUR $\mathbb{Z}$

Jean-Marc Derrien

Tome 143
Fascicule 3

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 467-488

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 143, septembre 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
143 (3), 2015, p. 467–488

UN THÉORÈME LIMITE CENTRAL LOCAL EN ENVIRONNEMENT ALÉATOIRE STATIONNAIRE DE CONDUCTANCES SUR $\mathbb{Z}$

PAR JEAN-MARC DERRIEN

RÉSUMÉ. — On démontre un théorème limite central local pour les marches aléatoires aux plus proches voisins en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur $\mathbb{Z}$ en s'affranchissant simultanément des deux hypothèses classiques d'uniforme ellipticité et d'indépendance sur les conductances. Outre le théorème limite central, on utilise pour cela des inégalités différentielles discrètes du type « inégalités de Nash » associées à la représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes. La méthode s'adapte aux chaînes de Markov analogues en temps continu.

ABSTRACT (*A local central limit theorem in stationary random environment of conductances on* $\mathbb{Z}$)

We prove a local central limit theorem for nearest neighbors random walks in stationary random environment of conductances on $\mathbb{Z}$ without using any of both classic assumptions of uniform ellipticity and independence on the conductances. Besides the central limit theorem, we use discrete differential Nash-type inequalities associated with the Hausdorff's representation of the completely decreasing sequences. The method is also valid for analogous continuous time Markov chains.

Texte reçu le 13 février 2013, révisé le 25 mai 2014 et accepté le 4 juillet 2014.

JEAN-MARC DERRIEN, Université de Brest, CNRS - UMR 6205, Laboratoire de Mathématiques de Bretagne Atlantique - 6, avenue Le Gorgeu, CS 93837, 29238 BREST cedex 3, France

Classification mathématique par sujets (2000). — 60J10, 60K37.

Mots clefs. — Marches aléatoires, environnement aléatoire stationnaire de conductances, théorème limite central local, inégalités de Nash, représentation de Hausdorff des suites complètement décroissantes, théorèmes ergodiques.

1. Le modèle et la présentation des principaux résultats

Depuis les années 1980, une part importante de l'étude des milieux aléatoires a trait aux marches aléatoires aux plus proches voisins en environnement aléatoire stationnaire de conductances sur $\mathbb{Z}^d$ (dont notamment les marches aléatoires sur l'amas de percolation). Dans ce cadre particulier, les différences entre les milieux considérés s'articulent essentiellement autour des trois modalités suivantes :

- la dimension d,
- le domaine des valeurs autorisées pour les conductances,
- considérer une famille de conductances aléatoires stationnaire ergodique (*environnement stationnaire*) vs. considérer le cas particulier d'une famille de conductances indépendantes et identiquement distribuées (*environnement i.i.d.*).

Par exemple, l'hypothèse d'uniforme ellipticité, c'est-à-dire d'encadrement des conductances par deux constantes strictement positives, permet l'utilisation de nombreuses méthodes classiques dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Pour faire un historique succinct des travaux qui ont motivé la présente étude, on peut citer, entre autres, [28] pour une vue d'ensemble des modèles de marches aléatoires en milieux aléatoires sur $\mathbb{Z}^d$ et la systématisation des techniques de martingales et d'« environnement vu de la particule » dans ce contexte, [23], [6] et [13] pour l'étude de la récurrence sur l'amas de percolation et en environnement (de conductances) stationnaire non uniformément elliptique en dimension $d \geqslant 2$, [19] pour une étude de la variance asymptotique en environnement stationnaire non uniformément elliptique sur $\mathbb{Z}$, [12], [38] et [18] pour un théorème limite central en environnement stationnaire uniformément elliptique en dimension $d \geqslant 1$, [38], [7], [11], [31], [30], [4], [9], [1] et [2] pour des théorèmes limites centraux et des principes d'invariance en environnements stationnaires non uniformément elliptiques en dimension $d \geqslant 2$, [17] pour des inégalités gaussiennes en environnement déterministe uniformément elliptique en dimension $d \geqslant 1$, [32], [33] et [3] pour des inégalités gaussiennes pour l'amas de percolation en dimension $d \geqslant 2$, [8], [14] et [10] pour des comportements singuliers du noyau de la chaleur en environnements i.i.d. non uniformément elliptiques en dimension $d \geqslant 4$, [5] pour un théorème limite central local pour l'amas de percolation en dimension $d \geqslant 2$.

Dans cet article, on démontre un théorème limite central local dans le cas stationnaire non uniformément elliptique unidimensionnel. On constate en particulier que le rapport entre la moyenne des résistances et celle des conductances joue un rôle dans le théorème limite central local alors que seul le produit de ces moyennes apparaît dans l'expression de la variance asymptotique de la marche aléatoire.

Précisons à présent le modèle étudié.

On considère en premier lieu un système dynamique probabilisé ergodique $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$, c'est-à-dire une mesure de probabilité μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et une transformation T de Ω, inversible, bi-mesurable, préservant la probabilité μ et pour laquelle les ensembles invariants sont de mesure égale à 0 ou à 1 (voir [36] par exemple). Alors, étant donnée une application mesurable $c : \Omega \to]0, +\infty[$, on appelle *conductance* de l'arête (non orientée) $\{x, x+1\}$ de $\mathbb{Z}$ dans l'*environnement* ω le réel strictement positif $c(x, x+1)(\omega) := c(T^x\omega)$ (on pose aussi $c(x+1, x)(\omega) := c(x, x+1)(\omega)$). De la sorte, la famille de conductances $(c(x, x+1))_{x\in\mathbb{Z}}$ constitue une suite de variables aléatoires stationnaire ergodique.

Un environnement ω dans Ω étant fixé, on s'intéresse au comportement de la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geqslant 0}$ sur $\mathbb{Z}$ partant de $x_0 \in \mathbb{Z}$ dont les probabilités de transition sont données par :

$$\mathbb{P}^\omega_{x_0}[S_{n+1} = x+1 \mid S_n = x] = \frac{c(x, x+1)(\omega)}{\overline{c}(x)(\omega)} =: p(x, x+1)(\omega)$$

et

$$\mathbb{P}^\omega_{x_0}[S_{n+1} = x-1 \mid S_n = x] = \frac{c(x, x-1)(\omega)}{\overline{c}(x)(\omega)} =: p(x, x-1)(\omega),$$

où l'on a posé $\overline{c}(x)(\omega) := c(x-1, x)(\omega) + c(x, x+1)(\omega)$, ceci pour tout x dans $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{P}^\omega_{x_0}$ est la probabilité sous laquelle évolue, dans l'environnement ω, la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geqslant 0}$ partant de x_0). Notons que la chaîne de Markov $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est réversible sur $\mathbb{Z}$ au sens où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\mathbb{P}^\omega_x[S_n = y]}{\overline{c}(y)} = \frac{\mathbb{P}^\omega_y[S_n = x]}{\overline{c}(x)}.$$

L'objet de cet article est de démontrer les trois résultats suivants qui prolongent le travail commencé dans [20]. Ils donnent l'ordre de grandeur de la probabilité pour la marche aléatoire partant de 0 d'être au temps n en un point x de $\mathbb{Z}$.

THÉORÈME 1.1. — *On a, pour presque tout ω dans Ω et pour tout x dans $2\mathbb{Z}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2n}\, \frac{\mathbb{P}^\omega_0[S_{2n} = x]}{\overline{c}(x)(\omega)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\int \frac{1}{c}\, d\mu}{\int \overline{c}\, d\mu}} & \text{si } \overline{c} \text{ et } 1/c \text{ sont intégrables} \\ 0 & \text{si } 1/c \text{ est intégrable et si } \int \overline{c}\, d\mu = +\infty \\ +\infty & \text{si } \int \frac{1}{c}\, d\mu = +\infty \text{ et si } \overline{c} \text{ est intégrable.} \end{cases}$$