Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

PHÉNOMÈNE DE MOSER-NEWMAN POUR LES NOMBRES SANS FACTEUR CARRÉ

Christian Mauduit & Carlos Gustavo Moreira

Tome 143

Fascicule 3

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 599-617

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un
périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 143, septembre 2015

Comité de rédaction

Gérard BESSON	Daniel HUYBRECHTS
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Antoine CHAMBERT-LOIR	Christophe SABOT
Charles FAVRE	Laure SAINT-RAYMOND
Pascal HUBERT	Wilhelm SCHLAG
Marc HERZLICH	

Raphaël KRIKORIAN (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € (\$ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© *Société Mathématique de France* 2015

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

PHÉNOMÈNE DE MOSER-NEWMAN POUR LES NOMBRES SANS FACTEUR CARRÉ

PAR CHRISTIAN MAUDUIT & CARLOS GUSTAVO MOREIRA

RÉSUMÉ. — Let μ denotes the Möbius function and $\mathbf{t} = (t(n))_{n \in \mathbb{N}}$ be the Thue-Morse sequence, defined by $t(n) = +1$ if the number of 1 in the dyadic representation of n is even and $t(n) = -1$ otherwise. The aim of this work is to give an asymptotic formula for $S(N) = \sum_{n < N} \mu^2(n)t(n)$ and to prove that $S(N) < 0$ for N big enough. This shows that square-free integers provide a first example of non-linear Moser-Newman phenomenon. Our method gives a similar result for z -th power free integers.

Texte reçu le 27 décembre 2013, révisé le 24 mai 2014 et accepté le 10 décembre 2014.

CHRISTIAN MAUDUIT, Université d'Aix-Marseille et Institut Universitaire de France, Institut de Mathématiques de Marseille, UMR 7373 CNRS, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille Cedex 9, France • *E-mail* : mauduit@iml.univ-mrs.fr

CARLOS GUSTAVO MOREIRA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, UMI 2924 IMPA-CNRS, Estrada Dona Castorina 110, 22460-320 Rio de Janeiro, RJ, Brasil • *E-mail* : gugu@impa.br

Classification mathématique par sujets (2000). — 11A63, 11B85, 11L03, 11N25.

Mots clefs. — Suite de Thue-Morse, nombres sans facteur carré, sommes trigonométriques.

Ce travail a bénéficié des soutiens suivants : CNPq, Réseau Franco-Brésilien en Mathématiques (Proc. CNPq 60-0014/01-5 and 69-0140/03-7), Palis-Balzan Project, Agence Nationale de la Recherche (ANR-10-BLAN 0103 MUNUM), DynEurBraz (IRSES 230844), Capes-Cofecub 661/10, Capes-Mathamsud 014/2012 et Ciência sem Fronteiras (projet PVE 407308/2013-0).

1. Introduction

Dans tout cet article, on désigne, pour tout nombre entier positif n , par $s(n)$ le nombre de 1 dans la représentation binaire de n (c'est-à-dire la somme des chiffres de n écrit en base 2) et par μ la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1, \mu(p_1 \cdots p_k) = (-1)^k$ si $p_1, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier. On pose $\alpha = \frac{\log 3}{\log 4}$ et, pour tout nombre réel $x, e(x) = \exp(2i\pi x)$.

1.1. Phénomène de Moser-Newman. — La suite de Thue-Morse $\mathbf{t} = (t(n))_{n \in \mathbb{N}} = ((-1)^{s(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, dont on peut faire remonter l'origine à la note [26] publiée par Prouhet en 1851, a été étudiée par de nombreux auteurs dans des contextes variés : algèbre, analyse harmonique, arithmétique, combinatoire, géométrie, systèmes dynamiques, ... (voir [1, 18]).

Gelfond a étudié dans [11] de manière précise la répartition des progressions arithmétiques dans la suite $\mathbf{t}$, montrant en particulier que pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2, a \neq 0$, on a

$$(1) \quad \sum_{n < N} t(an + b) = O(N^\alpha).$$

Il résulte de (1) que la fréquence d'apparition de $+1$ est égale à la fréquence d'apparition de -1 dans la suite $(t(3n))_{n \in \mathbb{N}}$. Mais Moser a conjecturé vers la fin des années 60 le phénomène surprenant suivant : à tout moment, le nombre d'apparitions de $+1$ est strictement supérieur à celui de -1 , c'est-à-dire que pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a $\sum_{n < N} t(3n) > 0$. Newman a donné une première preuve de cette conjecture dans [23] et Coquet a donné dans [4] une formule précise permettant d'exprimer la somme $\sum_{n < N} t(3n)$: pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a

$$(2) \quad \sum_{n < N} t(3n) = h(N) + N^\alpha F(\log_4 N),$$

avec

$$h(N) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ pair} \\ \frac{(-1)^{s(3N-1)}}{3} & \text{si } N \text{ impair} \end{cases}$$

et F une fonction continue nulle part dérivable de période 1 vérifiant

$$(3) \quad \inf F = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \sup F = \frac{55}{3} \left(\frac{3}{65}\right)^\alpha$$

et qu'il a étudié de manière détaillée. En particulier il montre que si l'on pose $x(N) = \frac{3N}{4^{\lfloor \log_4 3N \rfloor}} \in [1, 4]$, on a alors

$$(4) \quad F(\log_4 N) = 2 \cdot 3^{\alpha-1} x^{-1} \phi(x),$$

avec $\phi(x) = \sum_{a \geq 0} \frac{d(a)}{3^a}$, où les coefficients $d(a)$, à valeurs dans l'ensemble $\{0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2\}$, sont déterminés explicitement en fonctions du développement 4-adique du nombre réel $x \in [1, 4[$ et en déduit que si les nombres réels x et y vérifient $1 \leq x < y < x + \frac{1}{4^u} \leq 4$, alors

$$(5) \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq \frac{2}{3^u}.$$

Drmotā et Stoll ont montré dans [7] que, pour tout nombre entier $N \geq 1$, on a $\sum_{n < N} t(3n + 1) < 0$ et $\sum_{n < N} t(3n + 2) \leq 0$ (voir également [8]). Le cas général des sommes associées à des progressions arithmétiques quelconques

$$(6) \quad \sum_{n < N} t(an + b), \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad a \neq 0$$

est techniquement plus délicat. Drmotā et Skālba ont donné dans [6] des formules analogues à celle de Coquet ([2]) pour la somme (6) (voir également [12] pour le cas où a est un nombre premier, [13] pour le cas où $a = 3^r 5^s$ ($(r, s) \in \mathbb{N}^2$) et [7] pour une généralisation aux sommes $\sum_{n < N} e(s_q(an + b)/m)$, où s_q désigne la fonction somme des chiffres en base q et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) dont ils ont pu déduire en particulier les résultats remarquables suivants (voir également [2] pour le cas où m divise q ou $q - 1$) :

- si $3 \mid a$ ou si $a - 1$ est une puissance de 4, alors $\sum_{n < N} t(an) > 0$ pour tout nombre entier N assez grand ;
- le nombre de nombres premiers $p \leq x$ tels que $\sum_{n < N} t(pn) > 0$ pour tout nombre entier N assez grand est négligeable par rapport à $\frac{x}{\log x}$.

Pour tous nombres entiers positifs a et b les suites $(t(an + b))_{n \in \mathbb{N}}$ sont 2-automatiques (voir [9, Chapter 5] pour cette notion) et les résultats précédents reposent sur des estimations fines des valeurs propres des matrices associées à ces automates. Mais lorsque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une progression arithmétique (ou une suite *ad hoc*), les méthodes issues de l'algèbre linéaire ne sont plus directement utilisables et on ne connaît aucun résultat concernant le signe de $\sum_{n < N} t(u_n)$. Citons par exemple les deux conjectures suivantes, dues à Drmotā, Mauduit, Rivat, Shevelev et Skālba :

CONJECTURE 1.1. — *Pour tout nombre entier $N \geq 5$, on a $\sum_{n < N} t(n^2) < 0$.*

⁽¹⁾ On sait, d'après [20], que $\sum_{n < N} t(n^2) = o(N)$.