Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR CERTAINS COMPLÉTÉS UNITAIRES UNIVERSELS EXPLICITES POUR $\mathrm{GL}_2(F)$

Marco De Ieso

Tome 143
Fascicule 4

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 635-678

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 143, décembre 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)

Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc PEIGNÉ

Bull. Soc. math. France
143 (4), 2015, p. 635–678

SUR CERTAINS COMPLÉTÉS UNITAIRES UNIVERSELS EXPLICITES POUR $\mathrm{GL}_2(F)$

PAR MARCO DE IESO

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous donnons une description explicite du complété unitaire universel de certaines représentations localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques de $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ et généralisant ainsi des résultats de Berger-Breuil pour $F = \mathbb{Q}_p$. Pour cela, nous utilisons certains espaces de Banach de fonctions de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, avec r dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

ABSTRACT (*On some explicit Universal Unitary Completion for* $\mathrm{GL}_2(F)$)
In this paper we give an explicit description of the universal unitary completion of some locally $\mathbb{Q}_p$-analytic representations of $\mathrm{GL}_2(F)$, with F a finite extension of $\mathbb{Q}_p$, what generalizes a previous work of Berger-Breuil for $F = \mathbb{Q}_p$. To this aim, we use some Banach spaces of C^r functions on $\mathcal{O}_F$, with $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

1. Introduction, notations et énoncé des résultats

1.1. Introduction. — Soit p un nombre premier. La dernière décennie a vu l'émergence et la preuve d'une correspondance locale p-adique entre certaines représentations continues de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ et certaines représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Cette correspondance, qui a pris le nom de correspondance de Langlands p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, a été initiée par Breuil [5, 6], puis établie

Texte reçu le 30 février 2012, révisé et accepté le 18 février 2013.

MARCO DE IESO, Bâtiment 430, Université Paris-Sud, 91405, Orsay Cedex, France •
E-mail : `Marco.DeIeso@math.u-psud.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F, 11S, 20C, 20G, 22E, 26E30.

Mots clefs. — Correspondance de Langlands locale p-adique, complété unitaire universel, représentation localement analytique.

par Colmez [12] et Paškūnas [22] à la suite de travaux de Berger-Breuil [3] et Colmez [11].

Si F est une extension finie non triviale de $\mathbb{Q}_p$, la question d'associer des représentations p-adiques de $G \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{GL}_2(F)$ aux représentations p-adiques de dimension 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ dans l'esprit d'une correspondance locale à la Langlands est loin d'être résolue et les résultats obtenus pour l'instant sont très partiels. En utilisant principalement les travaux de Frommer [17] et de Schraen [27] sur la filtration de Jordan-Hölder des induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, Breuil [8] définit cependant une représentation localement $\mathbb{Q}_p$-analytique $\Pi(V)$ de G pour la plupart des représentations cristallines V de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ de dimension 2 et à poids de Hodge-Tate distincts. En général, la représentation $\Pi(V)$ ne permet pas de reconstruire la représentation galoisienne de départ, mais l'on s'attend toutefois à ce qu'elle intervienne comme sous-objet de la bonne représentation, ce qui fait des complétés unitaires universels de ses constituants fondamentaux des objets pertinents.

L'objet du présent article est de donner une description explicite du complété unitaire universel de certaines induites paraboliques localement $\mathbb{Q}_p$-analytiques, et notamment de celles qui interviennent dans la construction de la représentation $\Pi(V)$). L'espoir qu'une telle description est possible provient de [3, Theorème 4.3.1], où les auteurs décrivent le complété unitaire universel d'une induite parabolique localement algébrique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ à l'aide de l'espace des fonctions de classe C^r sur $\mathbb{Z}_p$, où r est un nombre rationnel positif qui dépend de l'induite considerée.

Pour cela, nous avons introduit et étudié dans [13] une nouvelle notion de fonction de classe C^r sur $\mathcal{O}_F$, où r désigne un nombre rationnel positif et $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. Cette notion s'appuie principalement sur des travaux d'Amice, Amice-Velù, Colmez, Van der Put et Vishik [1, 2, 10, 23, 30] et repose sur l'idée cruciale suivante : une fonction $f\colon \mathcal{O}_F \to E$ est de classe C^r si $f(x+y)$ a un développement limité à l'ordre $[r]$, où $[r]$ désigne la partie entière de r, en tout x et si le reste est $o(|y|^r)$ uniformément en x.

Tester la non nullité des complétés unitaires universels que nous avons construits est, en général, une question délicate qui n'est complétement résolue que pour $F = \mathbb{Q}_p$ [3, Corollaire 5.3.1] via la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine [16]. Mentionnons par ailleurs que [3, Theorème 4.3.1] est un ingrédient important dans la preuve de ce résultat. Toutefois, on démontre la non nullité dans quelques cas à partir de résultats de Vignéras [29], qui furent redemontrés par Kazhdan et de Shalit [18], et de [14].

Remerciements. — Je remercie vivement mon directeur de thèse Christophe Breuil. L'idée de pouvoir donner une description explicite de ces espaces lui est due. Je lui suis reconnaissant pour ses conseils, pour ses très nombreuses remarques et pour avoir suivi attentivement l'évolution de ce travail. Je remercie Benjamin Schraen pour avoir répondu à mes questions et pour avoir lu avec intérêt une version préliminaire de ce travail. Ses remarques ont été pour moi très précieuses. Je remercie Arno Kret pour avoir écouté mes idées ainsi que pour les suggestions qu'il a apportées.

1.2. Notations. — Soit p un nombre premier. On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$ contenue dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On désignera toujours par E une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ qui vérifie :

$$|S| = [F : \mathbb{Q}_p], \text{ où } S \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(F, E).$$

Si L désigne l'un des corps F ou E, on note $\mathcal{O}_L$ son anneau des entiers, on en une uniformisante ϖ_L et l'on note $k_L = \mathcal{O}_L/(\varpi_L)$ son corps résiduel. On pose $f = [k_F : \mathbb{F}_p]$, $q = p^f$ et l'on désigne par e l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$, de sorte que $[F : \mathbb{Q}_p] = ef$.

La valuation p-adique val_F sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ est normalisée par $\mathrm{val}_F(p) = [F : \mathbb{Q}_p]$ et l'on pose $|x| = p^{-\mathrm{val}_F(x)}$ si $x \in \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Si $a \in F$ et $n \in \mathbb{Z}$, on note $D(a, n) = a + \varpi_F^n \mathcal{O}_F$ le disque de centre a et de rayon q^{-n}.

On désigne par G le groupe $\mathrm{GL}_2(F)$, par T le tore déployé des matrices diagonales de G et par P le sous-groupe de Borel formé des matrices triangulaires supérieures de G.

Soit S' un sous-ensemble de S. Si $\underline{n}_{S'} = (n_\sigma)_{\sigma \in S'}$ et $\underline{m}_{S'} = (m_\sigma)_{\sigma \in S'}$ sont des $|S'|$-uplets d'entiers positifs ou nuls, nous posons :

(i) $\underline{n}_{S'}! \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} n_\sigma!$;
(ii) $|\underline{n}_{S'}| \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{\sigma \in S'} n_\sigma$;
(iii) $\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'} \stackrel{\text{déf}}{=} (n_\sigma - m_\sigma)_{\sigma \in S'}$;
(iv) $\underline{n}_{S'} \leqslant \underline{m}_{S'}$ si $n_\sigma \leq m_\sigma$ pour tout $\sigma \in S'$;
(v) $\binom{\underline{n}_{S'}}{\underline{m}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\underline{n}_{S'}!}{\underline{m}_{S'}!(\underline{n}_{S'} - \underline{m}_{S'})!}$;
(vi) pour tout $z \in \mathcal{O}_F$, $z^{\underline{n}_{S'}} \stackrel{\text{déf}}{=} \prod_{\sigma \in S'} \sigma(z)^{n_\sigma}$.

Pour alléger l'écriture, nous notons $\underline{n}$ au lieu de $\underline{n}_S$ un $|S|$-uplet d'entiers positifs ou nuls.

Enfin, si V est un E-espace vectoriel topologique, on note $V^\vee$ son dual topologique muni de la topologie forte [24, §9].