Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CYCLES GÉOMÉTRIQUES RÉGULIERS

Guillaume Bulteau

Tome 143
Fascicule 4

2015

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 727-761

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 143, décembre 2015

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 176 €, hors Europe : 193 € ($ 290)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
143 (4), 2015, p. 727–761

CYCLES GÉOMÉTRIQUES RÉGULIERS

PAR GUILLAUME BULTEAU

RÉSUMÉ. — Soit π un groupe de présentation finie. Pour une classe d'homologie h non nulle dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$, Gromov a énoncé (dans [10], §6) l'existence de cycles géométriques qui représentent h, de volume systolique relatif aussi proche que l'on veut de celui de h, pour lesquels on dispose d'un contrôle sur le volume des boules dont le rayon est plus petit qu'une fraction de la systole relative du cycle. L'objectif de cette note est d'expliquer ce résultat et d'en présenter une démonstration complète.

ABSTRACT (*Regular geometric cycles*). — Let π be a finitely presented group. If h is a non trivial homology class in $H_n(\pi;\mathbb{Z})$, a theorem of Gromov (see [10], §6) asserts the existence of regular geometric cycles which represent h, whose relative systolic volume is as close as desired to the systolic volume of h, in which we can control the volume of balls of radius less than half of the cycle's relative systol. The aim of this note is to explain and provide a complete proof of this result.

Texte reçu le 31 juillet 2012, révisé le 22 juillet 2013, accepté le 22 juillet 2013.

GUILLAUME BULTEAU, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck (Imag), UMR 5149 CNRS - Université Montpellier, Case courrier 051, 34095 Montpellier cedex 5 - France •
E-mail : `guillaume.bulteau@math.univ-montp2.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 53C23.

Mots clefs. — Cycles géométriques, systole, volume systolique, espace d'Eilenberg-McLane, complexes cubique.s.

Je remercie Florent Balacheff, Jacques Lafontaine et Stéphane Sabourau pour toutes les remarques qu'ils ont pu faire sur les premières versions de ce texte, ainsi qu'Ivan Babenko pour les nombreuses discussions sur ce sujet. Je remercie également le rapporteur anonyme pour ses commentaires, qui ont permis d'améliorer grandement certaines parties de ce texte. Ce travail est financé par l'ANR Finsler.

1. Introduction

1.1. Le cadre et le but. — Dans la suite π désignera un groupe de présentation finie et $n \geqslant 2$ est un entier. Considérons l'espace d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ et prenons une classe d'homologie h dans $H_n(\pi; Z)$ qui, par définition, est le groupe d'homologie $H_n(K(\pi, 1); \mathbb{Z})$. Rappelons que $K(\pi, 1)$ est un CW-complexe connexe tel que $\pi_1(K(\pi, 1)) = \pi$ et $\pi_i(K(\pi, 1)) = 0$ pour tout $i \geqslant 2$ entier. Un tel espace est unique à type d'homotopie près (voir [14]).

On appellera *cycle géométrique représentant* h un triplet (V, f, g) où

- V est une pseudo-variété orientable de dimension n ;
- $f : V \to K(\pi, 1)$ est un application continue telle que $f_*[V] = h$, $[V]$ étant la classe fondamentale de V et
$$f_* : H_n(V; \mathbb{Z}) \to H_n(\pi; \mathbb{Z})$$
étant l'application induite par f au niveau des groupes d'homologie ;
- g une métrique riemannienne lisse par morceaux sur V.

Les définitions précises des objets qui interviennent ci-dessus sont rappelées au paragraphe 1.3. Une représentation (V, f, g) de h sera dite *normale* lorsque f induit au niveau des groupes fondamentaux un épimorphisme. On peut noter que toute classe entière est représentable par un cycle géométrique et cette représentation peut être normalisée (voir [3]).

Soient (V, f, g) un cycle géométrique représentant h et $v \in V$. On note $\mathrm{syst}_v(V, f, g)$ la longueur du plus petit lacet c de point initial v dans V tel que le lacet $f \circ c$ soit non contractile dans $K(\pi, 1)$. On définit encore *la systole relative* de (V, f, g) par :
$$\mathrm{syst}(V, f, g) = \inf_{v \in V} \mathrm{syst}_v(V, f, g)$$

Le *volume systolique relatif* de (V, f, g) est alors : $\sigma(V, f, g) = \dfrac{\mathrm{vol}(V, g)}{\mathrm{syst}(V, f, g)^n}$.

Cela permet de définir *le volume systolique de* h notée $\sigma(h)$, qui est l'infimum des $\sigma(V, f, g)$ lorsque (V, f, g) décrit la collection des cycles géométriques qui représentent h.

Lorsque $h \neq 0$, selon Gromov (voir [10], § 6), on a $\sigma(h) > 0$. Cependant on ne sait pas si cet infimum est réalisé, ni quelle est la structure des pseudo-variétés qui le réalisent éventuellement. Dans le cas où la classe h est réalisable par une variété, on sait qu'il coïncide avec le volume systolique de n'importe quelle représentation normale par une variété de h, voir [3], [4] et [6]. Rappelons que le volume systolique d'une variété compacte M de dimension n est donné par :
$$\sigma(M) = \inf_g \frac{\mathrm{vol}(M, g)}{\mathrm{syst}(M, g)^n},$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques riemanniennes sur M et $\mathrm{syst}(M,g)$ désigne la longueur du plus petit lacet non contractile dans (M,g). On sait aussi, d'après un résultat de Babenko et Balacheff (voir [5]), que toute classe entière h dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$ admet une représentation normale par une pseudo-variété admissible V (i.e. telle que tout élément de $\pi_1(V)$ peut être représenté par un lacet qui ne rencontre pas le lieu singulier de V) et qu'alors le volume systolique de h est donné par :

$$\sigma(h) = \inf_g \frac{\mathrm{vol}(V,g)}{\mathrm{syst}(V,f,g)^n},$$

où l'infimum est pris sur toutes les métriques polyédrales sur V.

Pour un panorama de la géométrie systolique, on peut consulter [16].

Le but de ce texte est de proposer une démonstration détaillée du résultat suivant, dû à Gromov (voir [10] p. 71), dont la preuve existante est très lacunaire.

THÉORÈME A. — *Soient π un groupe de présentation finie et h une classe d'homologie entière non nulle dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$. Pour tout ε dans $]0,\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)[$, il existe un cycle géométrique (V,f,g) représentant h tel que :*

1. $\sigma(V,f,g) \leqslant \sigma(h)+\varepsilon$.
2. *Pour $R\in[\varepsilon,\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)]$, les boules $B(R)$ de rayon R dans V vérifient :*

$$\mathrm{vol}(B(R)) \geqslant A_n R^n \tag{1}$$

pour une certaine constante universelle A_n, qui ne dépend que de la dimension de h.

Un tel cycle géométrique est dit ε-régulier.

Pour illustrer de manière élémentaire ce théorème A, donnons une idée de la manière dont l'inégalité (1) sur le volume des boules permet de préciser la topologie des cycles géométriques ε-réguliers.

Soit (V,f,g) un cycle ε-régulier qui représente une classe d'homologie non triviale dans $H_n(\pi;\mathbb{Z})$. Considérons un système maximal $B_1,\dots,B_N$ de boules ouvertes disjointes de V de rayon $R_0=\frac{1}{2}\mathrm{syst}(V,f,g)$. Les boules concentriques $2B_1,\dots,2B_N$ de rayon $2R_0$ recouvrent V. Appelons $\mathscr{N}$ le nerf de ce recouvrement. Il s'agit du complexe simplicial construit de la manière suivante :

- Les sommets $p_1,\dots,p_N$ de $\mathscr{N}$ sont identifiés avec les boules du recouvrement ;
- Deux sommets p_i et p_j sont reliés par une arête lorsque $2B_i\cap 2B_j\neq\varnothing$;