Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

DELTA-COMPOSANTES DES MODULES DE REVÊTEMENTS : CORPS DE DÉFINITION

Orlando Cau

Tome 144
Fascicule 2

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 145-162

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 144, juin 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Marc Peigné

Bull. Soc. math. France
144 (2), 2016, p. 145–162

DELTA-COMPOSANTES DES MODULES DE REVÊTEMENTS : CORPS DE DÉFINITION

PAR ORLANDO CAU

RÉSUMÉ. — Nous nous intéressons au corps de définition des composantes irréductibles des espaces de modules de revêtements (espaces de Hurwitz). Nous poursuivons l'étude des Δ-composantes introduites dans un article précédent. Nous donnons une estimation générale de leur corps de définition. La deuxième partie de cet article concerne les relèvements de ces composantes dans une tour d'espaces de Hurwitz. On obtient des systèmes projectifs de composantes définies sur un corps de nombres de degré explicitement majoré .

ABSTRACT (*Delta-components of Hurwitz spaces: field of definition*)
We focus on the components irrédutibles Hurwitz spaces and their field of definition. For any finite group, we can construct such components defined on $\mathbb{Q}$. Our method allows one more flexibility in the type of ramification of the cover. These components are obtained by deformation of certain covers in the border of the moduli spaces. Finally, these components are also compatible in a tower of Hurwitz spaces, we obtain projective systems of components of the modular tower defined on $\mathbb{Q}$.

Texte reçu le 13 juin 2011, révisé et accepté le 5 juin 2012.

ORLANDO CAU, Laboratoire Paul Painlevé, Mathématiques, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France • *E-mail :* `cau.orlando@hotmail.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 12F12, 14H30, 14H10 ; 14D15.

Mots clefs. — Revêtement algébrique, espace de Hurwitz, composante de Harbater-Mumford, problème inverse de Galois, tour modulaire, déformation.

1. Introduction

Les espaces de Hurwitz $\mathrm{H}_r(G)$ sont les espaces de modules grossiers pour la catégorie des G-revêtements de groupe G de la droite projective à r points de branchement. Nous allons nous intéresser à leurs composantes irréductibles. L'étude de leur corps de définition est une étape préalable nécessaire de l'approche géométrique du problème inverse de Galois. En effet, celle-ci consiste à trouver des points $\mathbb{Q}$-rationnels sur un espace de Hurwitz (lesquels, si G est de centre trivial, donnent par spécialisation une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe G). Ces points $\mathbb{Q}$-rationnels, s'ils existent, appartiennent à une $\mathbb{Q}$-composante de $\mathrm{H}_r(G)$ qu'il convient de trouver en premier lieu.

Dans [2], nous avons défini et étudié la notion de Δ-composante des espaces de Hurwitz. L'intérêt de ce type de composantes est double ; d'une part on peut déterminer facilement leur corps de définition et d'autre part on garde une grande souplesse quant au type de ramification des revêtements appartenant à ces composantes. Par exemple, dans [5] Dèbes et Ghazi utilisent les composantes HM définies par Fried pour construire des revêtements p-adiques ayant bonne réduction modulo p pour p suffisamment grand ; néanmoins le type de ramification des revêtements est d'une forme très particulière. L'utilisation des Δ-composantes permet d'atteindre le même objectif mais avec une ramification moins contrainte.

Dans cet article, nous nous proposons de raffiner l'étude combinatoire de [2]. Nous obtenons trois résultats. Le premier (voir le théorème 3.2) est une estimation générale du corps de définition des Δ-composantes ; celle-ci repose sur une estimation de leur nombre. Le deuxième est un raffinement du critère d'irréductibilité de [2] (voir ci-après corollaire 3.4), particulièrement performant lorsque le groupe en question est simple. On obtient par exemple le résultat suivant pour M_{23} le groupe de Mathieu de degré 23 : l'espace de Hurwitz $\mathrm{H}_{15}(M_{23})$ contient une composante irréductible définie sur le corps des nombres rationnels. Le troisième résultat consiste en la construction d'une tour de composantes irréductibles dans la tour modulaire de Fried avec contrôle du corps de définition (théorème 4.8).

2. Préliminaires

2.1. Description combinatoire d'un G-revêtement. — Rappelons qu'un *G-revêtement* de groupe G est un revêtement galoisien f de $\mathbb{P}^1$ de groupe G muni d'un isomorphisme γ_f entre G et $\mathrm{Aut}(f)$, et qu'un morphisme entre deux G-revêtements f et g est un morphisme de revêtements compatible avec γ_f et γ_g. Chaque G-revêtement possède trois invariants : le groupe de monodromie G, l'ensemble $\mathbf{t} = \{t_1, \dots, t_r\}$ des points de branchement et pour chaque

$t \in \mathbf{t}$, la classe de conjugaison $C_t \subset G$ de l'inertie au-dessus de t. Le r-uplet $\mathbf{C} = (C_{t_1}, \ldots, C_{t_r})$ est appelé l'invariant canonique de l'inertie. D'un point de vue topologique, ces invariants ont une description simple. Etant donné $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_r\}$, on a la notion classique de *bouquet topologique* pour $\mathbf{t}$: il s'agit d'un r-uplet de classes d'homotopie $\Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ de lacets $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \mathbf{t}$ basés en un point $t_0 \notin \mathbf{t}$ vérifiant certaines conditions techniques (voir par exemple [4] section 1.1) lesquelles entraînent la propriété importante suivante : le r-uplet $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r)$ engendre le groupe fondamental topologique $\pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0)$ avec l'unique relation $\Gamma_1 \ldots \Gamma_r = 1$. Considérons maintenant un G-revêtement f ramifié seulement au-dessus de $\mathbf{t}$. L'action de monodromie induit une représentation $\Phi_f : \pi_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{t}, t_0) \to \mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$, où le groupe $\mathrm{Per}(f^{-1}(t_0))$ désigne le groupe des permutations de la fibre du revêtement f au-dessus du point t_0. Le groupe de monodromie G correspond à l'image de ce morphisme. L'invariant canonique de l'inertie est le r-uplet des classes de conjugaison de G des éléments $\Phi_f(\Gamma_i)$, $i = 1 \ldots r$. On note aussi $\mathrm{BCD}_\Gamma(f)$ le r-uplet $(\Phi_f(\Gamma_1), \ldots, \Phi_f(\Gamma_r))$ d'éléments de G, que l'on appelle *description des cycles de ramification* (*Branch Cycle Description* en anglais) du revêtement f par rapport au bouquet topologique Γ.

2.2. Espace de Hurwitz. — Pour $r \geq 2$, on note classiquement $\mathcal{U}_r$ l'espace de modules grossier du champ des droites projectives munies d'un diviseur de degré r. Etant donné un groupe fini G, on note $\mathrm{H}_r(G)$ l'espace de modules grossier du champ des G-revêtements de groupe G de la droite projective dont le diviseur de branchement est de degré r et $\theta_{r,G} : \mathrm{H}_r(G) \to \mathcal{U}_r$ l'application qui à un G-revêtement fait correspondre l'ensemble $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_r\}$ de ses points de branchement. Notons également, pour chaque r-uplet $\mathbf{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ non ordonné de classes de conjugaison de G, $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ le sous-espace de $\mathrm{H}_r(G)$ correspondant aux G-revêtements d'invariant canonique de l'inertie $\mathbf{C}$. Il est bien connu que $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ est une réunion de composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$. Pour finir, notons $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$ le corps fixé par le sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ des automorphismes τ tel que $\mathbf{C}^{\chi(\tau)} = \mathbf{C}$ où χ est le caractère cyclotomique. Le *Branch Cycle Argument* [10] lemme 2.8 montre que $\mathrm{H}_r(G, \mathbf{C})$ est défini sur le corps cyclotomique $\mathbb{Q}_{\mathbf{C}}$.

2.3. Composantes de l'espace de Hurwitz. — L'application $\theta_{r,G} : \mathrm{H}_r(G) \to \mathcal{U}_r$ est un revêtement étale. Sa fibre complexe est donc un revêtement topologique et les composantes irréductibles de $\mathrm{H}_r(G)$ correspondent aux orbites de l'action du groupe fondamental de $\mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ sur une fibre géométrique. Pour décrire concrètement cette action, on choisit un point-base $\mathbf{t} \in \mathcal{U}_r(\mathbb{C})$ et un bouquet