Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ANALOGUES ELLIPTIQUES DES NOMBRES MULTIZÉTAS

Benjamin Enriquez

Tome 144
Fascicule 3

2016

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 395-427

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 144, septembre 2016

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement Europe : 178 €, hors Europe : 194 € ($ 291)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 0037-9484

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. math. France
144 (3), 2016, p. 395–427

ANALOGUES ELLIPTIQUES DES NOMBRES MULTIZÉTAS

PAR BENJAMIN ENRIQUEZ

À la mémoire de ma mère,
Paulette Fortunée Enriquez,
née Bensoussan (1930–2016).

RÉSUMÉ. — Nous étudions des fonctions du paramètre elliptique définies commes intégrales itérées de fonctions elliptiques. Nous établissons leur lien avec les « associateurs elliptiques » de notre précédent travail au moyen de réalisations fonctionnelles d'algèbres de Lie apparaissant dans cette théorie.

ABSTRACT (*Elliptic analogues of multiple zeta values*). — We study functions of an elliptic parameter, which are defined as iterated integrals of elliptic functions. We establish their relation with the "elliptic associators" of our previous work, by means of a functional realization of Lie algebras appearing in that work.

Texte reçu le 28 février 2012, révisé les 28 février 2014 et 9 janvier 2015, accepté le 21 septembre 2015.

BENJAMIN ENRIQUEZ, IRMA (CNRS), Université de Strasbourg, 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg, France • *E-mail :* `b.enriquez@math.unistra.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11M32, 34M35.

Mots clefs. — Nombres multizétas, associateurs elliptiques, intégrales itérées, systèmes différentiels.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2016/395/$ 5.00

Introduction

La théorie des nombres multizétas a débuté dans [13] avec la construction de familles de relations entre ces nombres, reposant en partie sur le lien observé par Kontsevich entre multizétas et intégrales itérées sur les espaces de modules de courbes rationnelles avec points marqués. Parallèlement, Drinfeld a établi des relations d'origine géométrique satisfaites par une série non-commutative, l'associateur KZ ([3]) ; Le et Murakami ont identifié l'associateur KZ à une série génératrice des multizétas ([8]), ce qui a permis de considérer les relations de l'associateur KZ comme un deuxième système de relations entre multizétas. Le lien entre les deux systèmes de relations a été étudié par Furusho ([6]).

Un analogue elliptique de la théorie des associateurs a été construit dans [5] à partir d'un analogue elliptique de la connection de Knizhnik-Zamolodchikov ([2], voir aussi [9]). Le rôle de l'associateur KZ y est tenu par un couple de fonctions $(A(\tau), B(\tau))$ d'un paramètre τ dans le demi-plan de Poincaré, à valeurs dans un groupe de séries non-commutatives à deux variables $\exp(\hat{\mathfrak{f}}_2)$. Les résultats principaux de [5] sur le couple $(A(\tau), B(\tau))$ sont : le comportement de ce couple sous les transformations modulaires ; une famille de relations algébriques (d'origine géométrique) satisfaites par $(A(\tau), B(\tau))$; une équation différentielle satisfaite par le même objet ; son comportement en $\tau \to \mathrm{i}\,\infty$. Un corollaire de cette étude est une famille de relations algébriques entre intégrales itérées de séries d'Eisenstein et multizétas. Un rôle important est joué dans cette théorie, et également dans la théorie reliée des motifs elliptiques universels ([7, 11]), par une algèbre de Lie $\langle \delta_{2n}, n \geq -1\rangle \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{f}_2)$. Nous rappelons ces résultats en section 1.

Le but principal de cet article est l'étude des coefficients des séries $A(\tau), B(\tau)$. Il s'agit de fonctions

$$I_{\underline{d}}(\tau), J_{\underline{d}}(\tau), \quad \underline{d} = (d_1, \dots, d_n) \in \{-1, 0, 1, \dots\}^n$$

du paramètre elliptique, qui sont des analogues elliptiques des nombres multizétas.

La section 2 est consacrée à la détermination d'expressions intégrales pour ces fonctions. Nous utilisons pour cela le calcul de l'holonomie régularisée des équations différentielles sur $]0,1[$ à valeurs dans une algèbre libre, avec singularités aux extrémités. Ce calcul a été effectué dans [4] à partir d'idées contenues dans [8]. Le résultat de [4] est formulé en sections 2.1 et 2.2, et appliqué en sections 2.3 et 2.4 au calcul d'expressions intégrales pour les $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ (relations (18), (19), (20), (21)). En section 2.5, nous traduisons en termes des $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ certaines identités satisfaites par $(A(\tau), B(\tau))$.

La section 3 est consacrée aux systèmes différentiels satisfaits par les $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$. En section 3.1, on construit des systèmes différentiels satisfaits par des intégrales itérées générales du type de celles introduites en section 2.2. En section 3.2, on applique ce résultat aux fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ et on obtient ainsi un système différentiel satisfait par ces fonctions (théorème 3.10).

En section 4, on montre l'équivalence entre ce système différentiel et le système différentiel satisfait par $(A(\tau), B(\tau))$ explicité dans [5]. Ceci est réalisé au moyen d'une réalisation fonctionnelle de l'algèbre de Lie $\langle \delta_{2n}, n \geq -1\rangle$ (section 4).

Enfin, en section 5, on applique le système différentiel du théorème 3.10 au développement asymptotique des $I_{\underline{d}}(\tau), J_{\underline{d}}(\tau)$ en $\tau \to \mathrm{i}\infty$; on montre que ce développement asymptotique s'exprime à l'aide de nombres multizétas.

Signalons enfin les liens possibles entre le présent travail et [1] : les auteurs de cet article construisent une théorie des polylogarithmes elliptiques multiples, qui sont certaines fonctions multivaluées sur la variété E_τ^n, où $E_\tau := \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$. Ils projettent d'en déduire, par spécialisation, des fonctions de τ qu'ils appellent « fonctions multizétas elliptiques ». On peut s'attendre à ce que ces fonctions présentent des liens étroits avec les fonctions $I_{\underline{d}}(\tau)$, $J_{\underline{d}}(\tau)$ du présent article.

1. Préliminaires : associateurs elliptiques

Dans cette section, nous rappelons la construction et les propriétés de la fonction $\tau \mapsto (A(\tau), B(\tau))$ ([5]).

1.1. Définition de $(A(\tau), B(\tau))$. — Soit pour $n \geq 2$, $\bar{\mathfrak{t}}_{1,n}$ l'algèbre de Lie présentée par les générateurs x_i, y_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ et les relations $\sum_i x_i = \sum_i y_i = 0$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$, $[x_i, y_j] = [x_j, y_i] =: t_{ij}$ si $i \neq j$, $[x_k, t_{ij}] = [y_k, t_{ij}] = 0$ si i, j, k sont distincts. En particulier, l'algèbre de Lie $\bar{\mathfrak{t}}_{1,2}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{f}_2$ librement engendrée par les deux générateurs $x := x_1$ et $y := y_1$.

Soit $\mathfrak{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \Im(\tau) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On note $(z, \tau) \mapsto \theta_\tau(z)$ la fonction sur $\mathbb{C} \times \mathfrak{H}$ donnée par(1)

$$\theta_\tau(z) := \frac{e^{\pi \mathrm{i} z} - e^{-\pi \mathrm{i} z}}{2\pi \mathrm{i}} \prod_{n>0} \frac{(1 - e^{2\pi \mathrm{i}(z+n\tau)})(1 - e^{2\pi \mathrm{i}(-z+n\tau)})}{(1 - e^{2\pi \mathrm{i} n\tau})^2}.$$

On a $\theta_\tau(z+1) = -\theta_\tau(z) = \theta_\tau(-z)$, $\theta_\tau(z+\tau) = -e^{-\mathrm{i}\pi\tau} e^{-2\pi \mathrm{i} z}\theta_\tau(z)$, $\frac{\partial}{\partial z}\theta_\tau(z)_{|z=0} = 1$, et $(\theta_\tau(-))^{-1}(0) = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$. La fonction $\theta_\tau(-)$ est reliée à la fonction thêta de Jacobi donnée par

$$\vartheta_1(z, \tau) = -\sum_{n \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} e^{\pi \mathrm{i} n^2 + 2\pi \mathrm{i} n(z+\frac{1}{2})}$$

par l'identité $\vartheta_1(z, \tau) = 2\pi\eta(\tau)^3\theta_\tau(z)$, où $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n>0}(1-q^n)$ et $q = e^{2\pi \mathrm{i}\tau}$.

(1) On note $\mathrm{i} := \sqrt{-1}$.