

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p -ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

Julien Hauseux

Tome 145
Fascicule 1

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 161-192

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique
trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 145, mars 2017

Comité de rédaction

Christine BACHOC	Laurent MANIVEL
Emmanuel BREUILLARD	Julien MARCHÉ
Yann BUGEAUD	Kieran O'GRADY
Jean-François DAT	Emmanuel RUSS
Charles FAVRE	Christophe SABOT
Marc HERZLICH	Wilhelm SCHLAG
Raphaël KRIKORIAN	

Pascal HUBERT (Dir.)

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency	AMS
O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
Gurgaon 122002, Haryana	USA
Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € (\$ 64)

Abonnement électronique : 135 € (\$ 202),

avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € (\$ 296)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96

bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

© *Société Mathématique de France* 2017

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

COMPLÉMENTS SUR LES EXTENSIONS ENTRE SÉRIES PRINCIPALES p -ADIQUES ET MODULO p DE $G(F)$

PAR JULIEN HAUSEUX

RÉSUMÉ. — Nous complétons les résultats de [10]. Soit G un groupe réductif connexe déployé sur une extension finie F de \mathbb{Q}_p . Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous déterminons les extensions entre séries principales p -adiques et modulo p de $G(\mathbb{Q}_p)$ sans supposer le centre de G connexe ou le groupe dérivé de G simplement connexe. Cela fait apparaître un phénomène nouveau : il peut exister plusieurs extensions non scindées non isomorphes entre deux séries principales distinctes. Nous complétons aussi les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe. Nous déterminons enfin les extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation « ordinaire » de $G(F)$ (c'est-à-dire obtenue par induction parabolique à partir d'une représentation spéciale tordue par un caractère). Pour cela, nous calculons le δ -foncteur $H^\bullet \text{Ord}_{B(F)}$ des parties ordinaires dérivées d'Emerton relatif à un sous-groupe de Borel sur une représentation ordinaire de $G(F)$.

ABSTRACT (*Additional results on extensions between p -adic and mod p principal series of $G(F)$*). — We complete the results of [10]. Let G be a split connected reductive group over a finite extension F of \mathbb{Q}_p . When $F = \mathbb{Q}_p$, we determine the extensions between unitary continuous p -adic and smooth mod p principal series of $G(\mathbb{Q}_p)$ without assuming the centre of G connected nor the derived group of G simply connected. This shows a new phenomenon: there may exist several non-isomorphic non-split extensions between two distinct principal series. We also complete the computations of self-extensions of a principal series in the non-generic cases when the centre of G is connected. Finally, we determine the extensions of a principal series of $G(F)$ by an “ordinary” representation of $G(F)$ (i.e., parabolically induced from a special representation twisted by a character). In order to do so, we compute Emerton's δ -functor

Texte reçu le 24 mars 2015, modifié le 13 avril 2016 et le 30 mai 2016, accepté le 2 juin 2016.

JULIEN HAUSEUX

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Extensions, séries principales, parties ordinaires, filtration de Bruhat.

$H^* \text{Ord}_{B(F)}$ of derived ordinary parts with respect to a Borel subgroup on an ordinary representation of $G(F)$.

1. Introduction

Contexte. — Nous rappelons les résultats de [10]. Soient F une extension finie de \mathbb{Q}_p et G un groupe réductif connexe déployé sur F . On fixe une extension finie E de \mathbb{Q}_p .

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, nous avons calculé les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur E en faisant les hypothèses suivantes sur G : son centre est connexe et son groupe dérivé est simplement connexe. Dans cet article, nous traitons le cas général et nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale dans les cas non génériques lorsque le centre de G est connexe.

Nous avons également calculé les extensions d'une série principale continue unitaire de $G(F)$ sur E par l'induite parabolique d'un caractère continu unitaire. Dans cet article, nous généralisons ces calculs pour les représentations continues unitaires « ordinaires » de $G(F)$ sur E (c'est-à-dire obtenues par induction parabolique à partir d'une représentation continue unitaire spéciale tordue par un caractère continu unitaire).

Principaux résultats. — Soient $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et $T \subset B$ un tore maximal déployé. On note $B^- \subset G$ le sous-groupe de Borel opposé à B par rapport à T , Δ les racines simples de (G, B, T) et pour tout $\alpha \in \Delta$, on note s_α la réflexion simple correspondante. On note $\varepsilon : F^\times \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ le caractère cyclotomique p -adique et \mathcal{O}_E l'anneau des entiers de E . On calcule les Ext^1 dans les catégories abéliennes de représentations continues unitaires admissibles sur E en utilisant les extensions de Yoneda.

Nous calculons tout d'abord les extensions entre séries principales continues unitaires de $G(F)$ sur E . Lorsque $F \neq \mathbb{Q}_p$, ces extensions proviennent toujours d'une extension entre caractères de $T(F)$ (voir [10, théorème 1.2]). On suppose donc $F = \mathbb{Q}_p$ et on généralise [10, théorème 1.1].

En comparaison si le groupe dérivé de G n'est pas simplement connexe, alors G n'admet pas nécessairement un « twisting element » θ (par exemple $G = \text{PGL}_2$) et si le centre de G n'est pas connexe, alors on peut avoir

$$\text{card} \{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \} > 1$$

avec $\chi, \chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ des caractères continus unitaires distincts (voir l'exemple 3.2.3).

Nous démontrons le résultat suivant (théorème 3.2.1), ainsi que son analogue modulo p (c'est-à-dire dans les catégories de représentations lisses admissibles sur le corps résiduel k_E de E).

THÉORÈME 1.1. — *Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ un caractère continu unitaire.*

- (i) *Si $\chi' : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$ est un caractère continu unitaire distinct de χ , alors*

$$\dim_E \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi', \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right) = \text{card} \{ \alpha \in \Delta \mid \chi' = s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \}.$$

- (ii) *Si $s_\alpha(\chi) \cdot (\varepsilon^{-1} \circ \alpha) \neq \chi$ pour tout $\alpha \in \Delta$, alors le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

Sans l'hypothèse de généricité du point (ii), le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection E -linéaire et on donne un minorant et un majorant de la dimension de son conoyau (voir le point (ii) de la remarque 3.2.2).

Lorsque le centre de G est connexe, nous complétons les calculs d'auto-extensions d'une série principale modulo p dans les cas non génériques (théorème 3.2.4) et nous en déduisons le résultat analogue p -adique lorsque $p \neq 2$ (corollaire 3.2.6).

THÉORÈME 1.2. — *On suppose le centre de G connexe. Soit $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow k_E^\times$ un caractère lisse.*

- (i) *Si $p \neq 2$, alors le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme k_E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

- (ii) *Si $p = 2$, alors le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit une injection k_E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \hookrightarrow \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right)$$

dont le conoyau est de dimension $\text{card}\{\alpha \in \Delta \mid s_\alpha(\chi) = \chi\}$.

COROLLAIRE 1.3. — *On suppose le centre de G connexe et $p \neq 2$. Pour tout caractère continu unitaire $\chi : T(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathcal{O}_E^\times \subset E^\times$, le foncteur $\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)}$ induit un isomorphisme E -linéaire*

$$\text{Ext}_{T(\mathbb{Q}_p)}^1(\chi, \chi) \xrightarrow{\sim} \text{Ext}_{G(\mathbb{Q}_p)}^1 \left(\text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi, \text{Ind}_{B^-(\mathbb{Q}_p)}^{G(\mathbb{Q}_p)} \chi \right).$$

Nous étendons enfin nos calculs aux extensions d'une série principale de $G(F)$ par une représentation ordinaire de $G(F)$ (propositions 3.3.6 et 3.3.8).