Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ÉQUIVALENCE MONOÏDALE DE GROUPES QUANTIQUES ET K-THÉORIE BIVARIANTE

Saad Baaj & Jonathan Crespo

Tome 145
Fascicule 4

2017

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 711-802

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 4, tome 145, décembre 2017

Diffusion

Maison de la SMF - Case 916 - Luminy - 13288 Marseille Cedex 9 - France
christian.smf@cirm-math.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
bullsmf@ihp.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
145 (4), 2017, p. 711-802

ÉQUIVALENCE MONOÏDALE DE GROUPES QUANTIQUES ET K-THÉORIE BIVARIANTE

par Saad Baaj & Jonathan Crespo

Résumé. — Dans cet article, nous généralisons au cas localement compact et régulier, deux résultats fondamentaux [10] [27] portant sur les actions des groupes quantiques compacts. Soient G_1 et G_2 deux groupes quantiques localement compacts monoïdalement équivalents [6, 7] au sens de De Commer, et réguliers. Par un procédé d'induction que nous introduisons, nous établissons une équivalence des catégories A^{G_1} et A^{G_2} formées par les actions des groupes G_1 et G_2 dans les C*-algèbres. Comme application de ce résultat, nous déduisons l'équivalence des catégories KK^{G_1} et KK^{G_2}. La preuve s'appuie sur une version de la dualité de Takesaki-Takai pour les actions continues dans les C*-algèbres d'un groupoïde mesuré quantique de base finie.

Abstract (*Monoidal Equivalence of Quantic Groups and Bivariant K-Theory*). — In this article, we generalize to the case of regular locally compact quantum groups, two important results concerning actions of compact quantum groups (see [10] and [27]). Let G_1 and G_2 be two monoïdally equivalent regular locally compact quantum groups in the sense of De Commer (see [6, 7]). We introduce an induction procedure and we build an equivalence of the categories A^{G_1} and A^{G_2} consisting of continuous actions of G_1 and G_2 on C*-algebras. As an application of this result, we derive a canonical equivalence of the categories KK^{G_1} and KK^{G_2}. We introduce and investigate a notion of actions on C*-algebras of measured quantum groupoids (see [12]) on a finite basis. The proof of the equivalence between KK^{G_1} and KK^{G_2} relies on a version of the Takesaki-Takai duality theorem for continuous actions on C*-algebras of measured quantum groupoids on a finite basis.

Texte reçu le 14 mars 2014, modifié le 8 février 2017, accepté le 28 mars 2017.

Saad Baaj, Laboratoire de Mathématiques, UMR 6620 - CNRS, Université Blaise Pascal, Campus des Cézeaux, 3, place Vasarely, BP 80026, 63171 Aubière cedex, France • *E-mail :* `saad.baaj@math.univ-bpclermont.fr`
Jonathan Crespo • *E-mail :* `jonathan.crespo@math.univ-bpclermont.fr`

Mots clefs. — Groupes quantiques localement compacts, équivalence monoïdale, K-théorie bivariante.

doi:10.24033/bsmf.2751

Introduction

L'équivalence monoïdale des groupes quantiques compacts a été développée par Bichon, De Rijdt et Vaes (cf. [4]). Deux groupes quantiques compacts G_1 et G_2 sont dits monoïdalement équivalents si les catégories des représentations de G_1 et G_2 sont équivalentes comme C*-catégories monoïdales.

Dans [4], les auteurs ont montré que G_1 et G_2 sont monoïdalement équivalents si et seulement s'il existe une C*-algèbre unitale B, munie d'une action continue à gauche de G_1 et d'une action continue à droite de G_2, qui commutent et sont ergodiques de multiplicité pleine.

Plusieurs résultats importants de la théorie géométrique des groupes quantiques discrets libres (marches aléatoires et frontières associées, propriété de Haagerup, moyennabilité faible, K-moyennabilité, ...), reposent sur l'équivalence monoïdale de leurs duaux compacts. Parmi les applications de l'équivalence monoïdale à cette théorie, citons les suivantes :

- dans [23], en exploitant l'équivalence monoïdale [4] de $\mathrm{A_o}(F)$ avec un $\mathrm{SU}_q(2)$ convenable (et les résultats de [13], [24]), Vaes et Vander Vennet ont calculé les frontières de Poisson et de Martin pour les duaux des groupes orthogonaux libres $\mathrm{A_o}(F)$;
- dans [10], De Rijdt et Vander Vennet ont établi une correspondance bijective entre les actions continues de deux groupes quantiques compacts monoïdalement équivalents. De plus, cette correspondance échangent les frontières de Poisson ou de Martin des duaux discrets de ces deux groupes. Il en résulte que si on connait la frontière de Poisson ou de Martin pour un groupe quantique discret $\widehat{G}$, on peut déduire celles des groupes dont les duaux compacts sont monoïdalement équivalents à G. Ce principe a permis aux auteurs de calculer les frontières de Poisson des duaux des groupes quantiques d'automorphismes ;
- dans [9], et en utilisant le principe précédent, les auteurs ont établi la propriété CCAP et celle de Haagerup pour le dual de n'importe quel $\mathrm{A_o}(F)$. Grâce à la compatibilité de l'équivalence monoïdale avec certaines opérations, ils ont étendu ces propriétés pour les groupes quantiques discrets libres ;
- dans [27], Voigt a montré que les catégories KK^{G_1} et KK^{G_2} de deux groupes quantiques compacts monoïdalement équivalents, sont équivalentes. Ce résultat entraîne l'invariance par équivalence monoïdale de la conjecture de Baum-Connes pour les duaux. En établissant cette conjecture pour le dual d'un $\mathrm{SU}_q(2)$ convenable, Voigt a prouvé cette conjecture pour les duaux des groupes orthogonaux libres $\mathrm{A_o}(F)$, ainsi que la K-moyennabilité de ces groupes. Ce résultat a permis à Vergnioux et Voigt [26] d'établir cette conjecture pour les duaux des groupes unitaires libres $\mathrm{A_u}(F)$.

Dans sa thèse [7], De Commer a étendu la notion d'équivalence monoïdale au cas localement compact. Deux groupes quantiques localement compacts G_1 et G_2 (au sens de Kustermans et Vaes [17]), sont dits monoïdalement équivalents s'il existe une action galoisienne à gauche γ de G_1, et une action galoisienne à droite α de G_2, dans la même algèbre de von Neumann N, qui commutent. Il a montré que cette notion se décrit par un groupoïde mesuré quantique (au sens [18] et [12]), de base $\mathbb{C}^2$, dont G_1 et G_2 sont des "sous-groupes". Un tel groupoïde est appelé un groupoïde de co-liaison.

Les groupoïdes mesurés quantiques ont été introduits et étudiés par Lesieur et Enock (cf. [18], [12]). Un groupoïde mesuré quantique au sens de [12], est un octuplet $\mathcal{G} = (N, M, \alpha, \beta, \Gamma, T, T', \nu)$, où N et M sont des algèbres de von Neumann (N est la base et M est l'algèbre du groupoïde ; elles correspondent respectivement à l'espace des unités et à l'espace total d'un groupoïde classique), α et β sont des morphismes normaux et fidèles de N et N^{o} (l'algèbre opposée de N) dans M dont les images commutent, Γ est le coproduit, ν est un poids normal semi-fini sur N, et T , T' sont des poids opératoriels de M dans N. Ces objets vérifient une liste d'axiomes.

Dans le cas où la base N est de dimension finie, les axiomes liants les objets d'un tel octuplet $\mathcal{G}$, ont été simplifiés par De Commer (cf. [6], [7]) et nous utiliserons cette version dans la suite. Plus précisément, on peut prendre pour poids ν, la trace de Markov (non normalisée) de la C*-algèbre $N = \bigoplus_{l=1}^{k} M_{n_l}$. Le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert (resp. le produit fibré d'algèbres de von Neumann) est remplacé par le produit tensoriel ordinaire d'espaces de Hilbert (resp. d'algèbres de von Neumann). Le coproduit Γ est à valeurs dans $M \otimes M$, mais n'est pas unital.

Dans cet article, nous introduisons la notion d'action continue d'un groupoïde mesuré quantique $\mathcal{G}$ de base une C*-algèbre N de dimension finie, dans une C*-algèbre A. Nous étendons la construction du produit croisé et d'action duale. Dans le cas où $\mathcal{G}$ est régulier, nous étendons la dualité de Takesaki-Takai [2] à ce cadre.

Si un groupoïde de co-liaison $\mathcal{G}$, associé à l'équivalence monoïdale de deux groupes quantiques localement compacts G_1 et G_2, agit continument dans une C*-algèbre A, alors A est une somme directe $A = A_1 \oplus A_2$ et par restriction de l'action de $\mathcal{G}$, les groupes quantiques G_1 et G_2 agissent continument dans A_1 et A_2 respectivement. Réciproquement, si G_1 et G_2 sont réguliers, nous associons canoniquement à toute action continue de G_1 dans une C*-algèbre A_1, une C*-algèbre A_2 munie d'une action continue de G_2. Comme conséquences importantes de cette construction, nous établissons :

- une correspondance fonctorielle bijective, entre les actions continues des groupes quantiques G_1 et G_2 qui généralise le cas compact [10], ainsi que le cas des déformations [19] par un 2-cocycle ;
- une équivalence de Morita des produits croisés $A_1 \rtimes G_1$ et $A_2 \rtimes G_2$;