

435

ASTÉRISQUE

2022

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

Ron DONAGI & Tony PANTEV

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 435, 2022

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD Alexandru OANCEA
Christophe BREUIL Nicolas RESSAYRE
Philippe EYSSIDIEUX Rémi RHODES
Colin GUILLARMOU Sylvia SERFATY
Fanny KASSEL Sug Woo SHIN
Eric MOULINES
Nicolas BURQ (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF AMS
Case 916 - Luminy P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9 Providence RI 02940
France USA
commandes@smf.emath.fr <http://www.ams.org>

Tarifs

Vente au numéro : 50 € (\$ 75)
Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1 077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-960-9

doi:10.24033/ast.1178

Directeur de la publication : Fabien Durand

435

ASTÉRISQUE

2022

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

Ron DONAGI & Tony PANTEV

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Ron Donagi

Department of Mathematics, University of Pennsylvania David Rittenhouse Lab.,
209 South 33rd Street, Philadelphia, PA 19104-6395, USA

Tony Pantev

Department of Mathematics, University of Pennsylvania David Rittenhouse Lab.,
209 South 33rd Street, Philadelphia, PA 19104-6395, USA

Texte reçu le 9 octobre 2019 ; révisé le 3 mars 2019 ; accepté le 6 septembre 2019.

Mathematical Subject Classification (2010). — 14D24, 22E57, 14F10, 14A30, 14F08, 14H60, 14D23.

Keywords. — Non-abelian Hodge theory, Hitchin fibration, \mathcal{D} -modules, parabolic bundles, geometric Langlands correspondence, Hecke property, spectral cover, abelianization.

Mots-clefs. — Théorie de Hodge non-abélienne, fibration de Hitchin, \mathcal{D} -modules, fibrés paraboliques, correspondance de Langlands géométrique, propriété de Hecke, revêtement spectrale, abélianisation.

PARABOLIC HECKE EIGENSHEAVES

by Ron DONAGI & Tony PANTEV

Abstract. — We study the Geometric Langlands Conjecture (GLC) for rank two flat bundles on the projective line C with tame ramification at five points $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. In particular we construct the automorphic \mathcal{D} -modules predicted by GLC on the moduli space of rank two parabolic bundles on $(C, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\})$. The construction uses non-abelian Hodge theory and a Fourier-Mukai transform along the fibers of the Hitchin fibration to reduce the problem to one in classical projective geometry on the intersection of two quadrics in \mathbb{P}^4 .

Résumé. (Faisceaux propres de Hecke paraboliques) — Nous étudions la conjecture géométrique de Langlands (CGL) pour les fibrés plats de rang deux sur la ligne projective C avec une ramification modérée en cinq points $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. En particulier, nous construisons les \mathcal{D} -modules automorphes prédits par CGL sur l'espace des modules de fibrés paraboliques de rang deux sur $(C, \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\})$. La construction utilise la théorie de Hodge non abélienne et une transformé de Fourier-Mukai le long des fibres de la fibration de Hitchin pour réduire le problème à une question en géométrie projective classique à propos l'intersection de deux quadriques dans \mathbb{P}^4 .

CONTENTS

| | |
|---|-----|
| 1. Introduction | 1 |
| 1.1. The conjecture | 1 |
| 1.2. The program | 5 |
| 1.3. Parabolic version | 6 |
| 1.4. Our results | 8 |
| 2. Parabolic objects | 15 |
| 2.1. Parabolic bundles and Higgs bundles | 15 |
| 2.2. Parabolic Chern classes | 19 |
| 2.3. Natural operations | 19 |
| 2.4. Stability | 25 |
| 3. Moduli Spaces | 29 |
| 3.1. A family of moduli problems | 30 |
| 3.2. Birational models and chambers | 32 |
| 3.3. The GIT construction | 36 |
| 4. The Hecke correspondence | 55 |
| 4.1. Hecke correspondences of moduli stacks and moduli spaces | 55 |
| 4.2. The Hecke correspondence on X | 57 |
| 5. The modular spectral cover | 69 |
| 5.1. The fiber of the Hitchin map | 69 |
| 5.2. The base locus | 72 |
| 5.3. The case of nilpotent residues | 76 |
| 5.4. Wobbly, shaky and exceptional loci | 83 |
| 6. Hecke eigensheaves | 89 |
| 6.1. Parabolic divisors | 89 |
| 6.2. Consistent labeling | 91 |
| 6.3. Parabolic Hecke data | 94 |
| 6.4. The eigensheaf property | 104 |
| 6.5. Abelianization | 109 |
| 6.6. Linear equivalence conditions | 124 |
| 7. Solving the constraints | 131 |
| 7.1. Chern characters | 131 |
| 7.2. Parabolic Chern characters | 133 |

| | |
|--|------------|
| 7.3. Killing the Chern classes | 138 |
| 7.4. Hecke conditions | 138 |
| 7.5. The class of the kernel | 142 |
| 7.6. The Okamoto map | 152 |
| 8. Summary | 159 |
| Appendix. TDO and the tamely ramified GLC | 163 |
| A.1. Setup for the tamely ramified GLC | 163 |
| A.2. The non-abelian Hodge theory approach | 166 |
| A.3. Twisted Deligne-Goresky-MacPherson extensions | 171 |
| A.4. Remarks on untwisting | 176 |
| A.5. Geometric class field theory revisited | 178 |
| Bibliography | 181 |
| List of notations | 187 |
| Index | 189 |