Concours SMF Junior 2022

Sujet 1 – Algèbre

Soit $\mathbb{K}$ un corps fini, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme nilpotent de E. Nous nous intéressons au nombre de sous-espaces stables de u.

Nous notons q le cardinal de $\mathbb{K}$ et n la dimension de E. Dans une base adéquate de E, la matrice de u est diagonale par blocs, avec sur la diagonale des blocs de Jordan de taille λ_1, λ_2, ..., λ_ℓ. (Par construction, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell$.) Nous supposerons que les λ_i sont rangés dans l'ordre décroissant : la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ est ainsi déterminée par u. Le nombre de sous-espaces stables de u ne dépend que de λ et q : nous le notons $a_\lambda(q)$.

Le cas où u est cyclique (c'est-à-dire $\ell = 1$ et $\lambda = (n)$) est classique : les sous-espaces stables de u sont les sous-espaces de la forme $\ker u^d$, où d est un entier tel que $0 \leq d \leq n$ (notons qu'ici nous avons l'égalité $\ker u^d = \operatorname{im} u^{n-d}$). Par conséquent, $a_{(n)}(q) = n + 1$.

Le cas $u = 0$ (c'est-à-dire $\ell = n$ et $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$) est lui aussi bien connu : si $0 \leq d \leq n$, alors le nombre de sous-espaces vectoriels de dimension d de E est donné par le coefficient binomial de Gauss

$$\binom{n}{d}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-d+1})}{(1-q^d)(1-q^{d-1})\cdots(1-q)}$$

et ainsi

$$a_{(1,1,\ldots,1)}(q) = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{d}_q .$$

L'exercice consiste à étudier l'énoncé suivant : $a_\lambda(q)$ est un polynôme en q à coefficients entiers positifs, et les valeurs en 0 et 1 de ce polynôme sont $a_\lambda(0) = n + 1$ et

$$a_\lambda(1) = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1)\cdots(\lambda_\ell + 1).$$

Remarque. Vous pouvez commencer par regarder des exemples en petite dimension. À défaut de parvenir à démontrer le cas général, qui est difficile, vous pouvez vous concentrer sur des situations particulières, par exemple le cas où λ n'a que deux parts (c'est-à-dire $\ell = 2$) ou le cas $u^2 = 0$ (c'est-à-dire tous les λ_i sont inférieurs ou égaux à 2). La rédaction d'exemples ou de solutions partielles sera valorisée.

Question subsidiaire. Omettons l'hypothèse que u est nilpotent. Comment alors peut-on exprimer le nombre de sous-espaces stables de u en fonction des facteurs invariants de u ?

Sujet 2 – Analyse

On se pose la question de la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+|\sin(nt)|}}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Cette série fait penser à une série de Riemann, mais avec un exposant oscillant entre 1 et 2 et il n'est a priori pas évident de deviner la nature. L'objectif est de répondre à la question dans un contexte plus général où l'on remplace la fonction sinus par une fonction périodique quelconque.

L'étude de la nature de ce type de séries dont le terme général s'exprime à l'aide d'évaluations de fonctions périodiques comme $x \mapsto \sin(xt)$ et $x \mapsto \cos(xt)$ s'avère souvent délicate. Elle est fréquemment liée à des estimées fines sur la dynamique d'une rotation sur le cercle. Parfois, la nature de la série dépend de propriétés arithmétiques de la période (par exemple sur le développement en fraction continue). Quelques exemples illustratifs parmi de nombreux autres :

— C'est un exercice facile et classique que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nt)}{n}$ converge quel que soit t.

— Hardy et Littlewood ont déterminé sous quelles conditions arithmétiques précises sur t la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2 t)}{n}$ converge (en particulier, la nature de la série dépend de t).

— Hardy et Littlewood ont également démontré que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^2 t)}{\sqrt{n}}$ est toujours divergente si $t/2\pi$ est irrationnel.

— Plus récemment, il a été montré que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n^3 t)}{n}$ est toujours convergente.

— Pour $\alpha > 0$ la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha + \sin(nt)}$ converge pour $t \in [0, 2\pi]$ sauf pour un nombre fini de valeurs de t (exercice assez élémentaire), alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln(n) + \sin(nt)}$ converge par exemple pour $t = 1$ grâce à certaines propriétés arithmétiques de π (degré d'irrationalité), mais il existe un ensemble indénombrable de valeurs de t pour laquelle la série diverge.

Le problème proposé n'est pas aussi complexe que certains des exemples énoncés ci dessus, mais repose tout de même sur certaines subtilités de la répartition des suites $(nt)_{n\in\mathbb{N}}$ modulo 1.

Questions

Etant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique, on considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+f(n)}}$.

1. On suppose que f est lipschitzienne et vérifie $f(0) = 0$. Etudier la nature de la série.
2. On suppose que f est lipschitzienne, qu'elle s'annule (pas forcément en 0) et que sa période est irrationnelle. Etudier la nature de la série.
3. Soit $\alpha < 1$. On pose pour $t > 0$ $f(x) = |\sin(2\pi tx)|^{\alpha}$. Montrer qu'il existe au moins un nombre irrationnel t tel que la série diverge, et au moins un nombre irrationnel t tel que la série converge.

Sujet 3 – Arithmétique

Notations :

Soit φ l'indicatrice d'Euler : pour k entier ≥ 1, $\varphi(k)$ est le nombre d'entiers dans l'intervalle $[1, k]$ premiers avec k.

Soit r un entier impair > 1 et soit $\mathfrak{o}_2(r)$ l'ordre multiplicatif de 2 modulo r, c'est-à-dire le plus petit entier $\ell > 0$ tel que $2^\ell \equiv 1 \bmod r$.

Si a et b sont deux entiers ≥ 1, on note $\gcd(a, b)$ leur pgcd. On convient aussi que si b est non nul, $\gcd(0, b) = b$.

On note Card A ou $|A|$ le nombre d'éléments d'un ensemble fini : Card $A = |A| = \sum_{k \in A} 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$\sum_{\substack{d \mid 2n+1 \\ d \neq 1}} \frac{\varphi(d)}{\mathfrak{o}_2(d)} = \left(\frac{1}{\mathfrak{o}_2(2n+1)} \sum_{j=0}^{\mathfrak{o}_2(2n+1)-1} \gcd(2^j - 1, 2n+1) \right) - 1.$$

2. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ défini par :

$$f(e_j) := \begin{cases} e_{2j} & \text{si } 1 \leq j \leq n; \\ e_{2j-(2n+1)} & \text{si } n+1 \leq j \leq 2n. \end{cases}$$

Montrer que le polynôme caractéristique de f est égal à

$$\prod_{\substack{d \mid 2n+1 \\ d \neq 1}} (X^{\mathfrak{o}_2(d)} - 1)^{\varphi(d)/\mathfrak{o}_2(d)}.$$

3. On note log le logarithme népérien. Montrer que

$$\sum_{\substack{d \mid 2n+1 \\ d \neq 1}} \frac{\varphi(d)}{\mathfrak{o}_2(d)} = O\left(\frac{n}{\log n} \right).$$

Sujet 4 – Combinatoire

On souhaite colorier le réseau $\mathbb{Z}^2$ en bleu et en rouge, suivant la règle suivante : on ne peut pas colorier en même temps les deux points (x, y) et $(2x, 2y)$ en rouge. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, notons X_n le nombre des façons de colorier les points $\mathbb{Z}^2 \cap [-n, n]^2$. Montrer que la suite $\frac{1}{n^2} \log X_n$ converge et calculer la limite.

Sujet 5 – Modélisation

Pour fêter son anniversaire, comme d'habitude en cette circonstance, un enfant apporte en classe une tarte au chocolat et une tarte à la praline de même taille.

En début d'année, dans cette situation, la maîtresse demandait à chaque enfant ce qu'il préfèrait. Par exemple, 20 élèves choisissaient le chocolat et 5 la praline. Puis la maîtresse annonçait que la tarte au chocolat serait donc divisée en 20 parts égales et la tarte à la praline seulement en 5. Mais un 1/20e de tarte ce n'est vraiment pas beaucoup, et la maîtresse donnait toujours à chaque enfant un peu de temps pour changer d'avis, éventuellement plusieurs fois, avant de procéder aux coupes.

Maintenant, la maitresse connaît bien ses élèves et elle aimerait procéder au partage des deux tartes de sorte qu'il ne soit plus nécessaire de donner du temps aux enfants pour changer d'avis. Il faudrait trouver d'emblée un partage que chacun accepterait.

Or, chaque enfant a ses propres préférences sous la forme d'un coefficient de plaisir à manger une unité de tarte au chocolat (on appelle $c_i > 0$ le coefficient de l'enfant i) et d'un coefficient de plaisir à manger une unité de tarte à la praline (on appelle $p_i > 0$ le coefficient de l'enfant i) : entre une part de chocolat de taille t_c et une part de praline de taille t_p, l'enfant i préfère le chocolat si $c_i t_c > p_i t_p$ et la praline si $c_i t_c < p_i t_p$.

Les enfants n'ayant pas la possibilité de se réunir et discuter ensemble de leurs choix, chacun déclare son choix (chocolat ou praline) et chacun décide de changer d'avis selon si cela lui permet ou pas d'augmenter sa satisfaction, en supposant que les choix des autres ne changent pas. On cherche une configuration de choix qui soit stable, c'est-à-dire dans laquelle aucun enfant ne souhaite changer d'avis. Ce que la maîtresse va faire est d'attribuer elle-même un choix (chocolat ou praline) à chaque enfant ; elle demandera ensuite à chacun indépendamment si, au vu de la répartition proposée, il préfère changer, et elle compte bien faire en sorte que personne ne change, parce qu'elle aura trouvé une configuration stable (qu'on appelle également un équilibre).

(a) Démontrer qu'une telle configuration stable existe toujours.

(b) Construire un exemple de configuration stable où une des tartes n'est choisie par aucun enfant.

(c) Construire un exemple de non-unicité de la configuration stable.

(d) Peut-on trouver, dans une configuration stable, un couple d'enfants qui auraient (chacun individuellement) intérêt à échanger leurs parts mais qui n'ont pas pu le faire à cause de l'interdiction de s'accorder ?

(e) On imagine pendant un instant que les enfants ne se connaissent pas encore très bien et qu'on n'arrive pas forcément tout de suite à une configuration stable. Supposons qu'au début chaque enfant choisisse sa tarte préférée (selon $p_i > c_i$ ou $p_i < c_i$, sans se soucier de la taille des parts) et qu'ensuite, à chaque fois que la maîtresse propose, en même temps à tous, de changer d'avis, il recalcule ce qu'il préfère en imaginant que les autres ne changeraient pas d'avis : cela donne lieu à une suite de configurations de choix ; peut-on dire que ça converge forcément (et, si oui, en un nombre fini d'itérations ou asymptotiquement ?) vers une configuration stable ?

On suppose maintenant que le choix des enfants n'est pas binaire : au lieu de choisir entre chocolat et praline ils peuvent indiquer deux proportions σ_i et π_i, avec $\sigma_i, \pi_i \geq 0$ et $\sigma_i + \pi_i = 1$, qui représentent un choix mixte. L'enfant qui choisit (σ_i, π_i) recevra une part de tarte au chocolat de taille $\frac{\sigma_i}{\sum_j \sigma_j}$ et une de tarte à la praline de taille $\frac{\pi_i}{\sum_j \pi_j}$. On cherche à nouveau une configuration stable.

(f) Prouver que dans une configuration stable chaque tarte est bien mangée par au moins deux enfants différents.

(g) Démontrer qu'une configuration stable existe toujours.

(h) Prouver que dans une configuration stable on ne peut pas avoir un enfant qui ne mange que du chocolat, un autre qui ne mange que de la praline, mais les deux auraient préféré échanger leurs parts.

Discuter enfin le cas où le nombre d'enfants est infini, chacun ayant un poids négligeable [1] et les liens de ce cas avec les deux cas présentés ici (choix binaires ou mixtes) dans la limite où le nombre d'enfants de la classe tend vers l'infini.

1. Les jeux où chaque joueur est négligeable devant les autres sont appelés *jeux non-atomiques* et sont utilisés comme une approximation très raisonnable de beaucoup de situations réelles comme le problème de l'équilibre en trafic routier, où le temps de parcours d'une route dépend du nombre de véhicules sur la même route. Les jeux où l'utilité de chaque joueur dépend du nombre d'individus faisant le même choix que lui (en pénalisant le cas où ce nombre est trop grand) sont appelés *jeux de congestion* et les problèmes de trafic, tout comme le problème de partage de gâteaux qu'on vient d'analyser, en sont un exemple. Les équilibres dans les problèmes de trafic sont appelés *équilibres de Wardrop* et ont été étudiés dans des cas discrets - sur une réseau - ou continu - dans un domaine, toute courbe étant admise, en lien avec des EDP satisfaites par l'intensité de trafic réalisé par les choix des joueurs. Une théorie mathématique récente qui reprend beaucoup de ces aspects est celle des *jeux à champ moyen*. Dans tous ces jeux, les équilibres sont plus faciles à décrire et à trouver lorsqu'il existe une fonctionnelle de congestion globale à minimiser, typiquement convexe, ce qui est souvent le cas dans les jeux de congestion continus. Les jeux admettant une telle fonctionnelle s'appellent *jeux potentiels* parce que la fontion qu'on cherche à minimiser joue le rôle d'un potentiel comme lorsqu'on dit qu'une force est potentielle quand elle a une forme gradient. Dans le cas atomique il est souvent plus difficile de trouver un potentiel.

Sujet 6 – Probabilités

Le *processus de Bienaymé–Galton–Watson* est un des processus classiques utilisés pour modéliser l'évolution d'une population, qui se reproduit de manière asexuée, homogène et stationnaire dans le temps. Il admet une *transition de phase* remarquable : si m désigne le nombre moyen d'enfants d'un individu, alors la population s'éteint presque sûrement si $m \leq 1$ (en excluant le cas particulier où un individu a toujours un seul enfant), et survit avec probabilité strictement positive si $m > 1$.

Il s'agit ici d'étudier une "tropicale" de ce processus, où la somme dans la définition du processus de Bienaymé–Galton–Watson est remplacée par un max, et de se demander comment ceci influence la transition de phase.

Plus précisément, on fixe une mesure de probabilité μ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, qui vérifie $\mu(0) > 0$. Soient $(Z_{n,i})_{n \geq 1, i \geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ. On définit récursivement la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 0}$ par $X_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$:

$$X_n = \max \{ Z_{n,i} | 1 \leq i \leq X_{n-1} \} ,$$

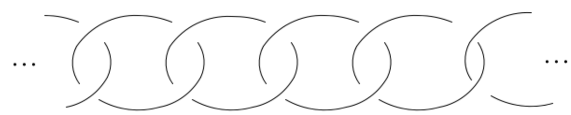
avec la convention $\max \emptyset = 0$. On se demande ainsi, en fonction de μ, si la probabilité de survie $\mathbb{P}(\forall n, X_n > 0)$ vaut 0 ou non.

1. Montrer que si μ est à support fini, alors $\mathbb{P}(\forall n, X_n > 0) = 0$.
2. Montrer que si $\sum_{i=1}^{\infty} i\mu(i) < 1$, alors $\mathbb{P}(\forall n, X_n > 0) = 0$.
3. Montrer que si $\sum_{i=1}^{\infty} i\mu(i) < +\infty$, alors $\mathbb{P}(\forall n, X_n > 0) = 0$.
4. Montrer que si $\mu(i) \sim \frac{c}{i^\alpha}$ quand $i \to +\infty$ avec $c > 0$ et $1 < \alpha < 2$, alors $\mathbb{P}(\forall n, X_n > 0) > 0$.
5. Étudier le cas $\mu(i) \sim \frac{c}{i^2}$ quand $i \to +\infty$ avec $c > 0$.

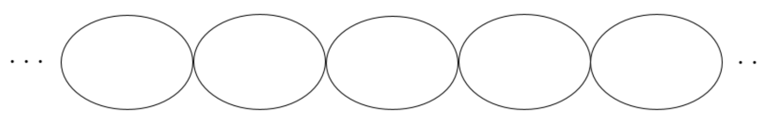
Sujet 7 – Topologie

On considère dans $\mathbb{R}^3$ une droite D et $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\,,\ z = 0\}$ un cercle. On note X le complémentaire de D dans $\mathbb{R}^3$ et Y le complémentaire de C dans $\mathbb{R}^3$.

1. Calculer les groupes fondamentaux de X et Y.[2]
2. Trouver une suite croissante d'ouverts d'adhérences compactes dont l'union recouvre X. Même question pour Y.
3. Les espaces topologiques X et Y sont-ils homéomorphes ?
4. On considère L_1 l'entrelac infini suivant



et L_2 le recollement infini de cercles suivant



A-t-on $\mathbb{R}^3 - L_1$ homéomorphe à $\mathbb{R}^3 - L_2$?

2. Cette première question est facultative et sans incidence sur la résolution des questions suivantes : elle en illustre seulement le contexte.