

JOURNÉE ANNUELLE

DES MATHÉMATIQUES AU MONDE SOCIO-ÉCONOMIQUE

Journée organisée par P. Pansu

Société Mathématique de France 2015

Table des matières

1. Christian ARBER & Frédéric Jean : *La mécanique des sphères de Lie : un futur pour la CAO ?*..... 1
2. Nicolas PETIT : *Théorie du contrôle : automobile, pétrole, aéronautique*..... 17

LA MÉCANIQUE DES SPHÈRES DE LIE : UN FUTUR POUR LA CAO ?

par

Christian Arber & Frédéric Jean

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

C.G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830,
in *Gesammelte Werke*, Vol. I, Berlin (1881), p. 454

Pierre Bézier, « chez Citroën, une recherche assez semblable à la mienne avait été menée dès 1958 par un mathématicien, Paul de Casteljaou. Mais elle n'avait pas été rendue publique. À ce propos, durant des années, quand je présentais mes travaux à la Régie Renault ou ailleurs, j'invoquais les recherches d'un professeur mythique que j'avais appelé Durant. Je lui avais attribué les résultats de mes propres réflexions, ce qui donnait confiance aux gens. Parce que si j'avais dit qu'il s'agissait de polynômes définis par moi-même, je crois que je serais devenu une abomination pour la maison ! Alors je parlais des fonctions de Durant et les gens regardaient les courbes, très satisfaits. J'ai même enseigné ces fonctions au Conservatoire national des arts et métiers. On m'a encore demandé des nouvelles de Durant, voici trois ans chez General Motors... Plus sérieusement, la propriété intellectuelle sur ce travail devrait pourtant être partagée avec Paul de Casteljaou, dont je ne manque jamais de citer la contribution. »



Sophus Lie (1842-1899)



Bernhard Riemann (1826-1866)



Elie Cartan (1869-1951)

Résumé. — La plupart des pièces ou ensembles de pièces de la vie courante sont conçus maintenant en CAO (Conception Assistée par Ordinateur) : voiture, avion bien sûr, mais aussi savon, emballage de savon, machine à emballer les savons,... On peut se douter que la modélisation géométrique y joue un grand rôle. Mais quelle géométrie ? Et finalement quels ressorts mathématiques sont employés dans ce qui est utilisé tous les jours par des centaines de milliers de concepteurs à travers le monde (et des millions d'utilisateurs de jeux vidéo !) ? À leur insu et pour leur bonheur. Géométrie cartésienne bien sûr, mais aussi de belles vieilles idées de la grande école de géométrie franco-allemande de la fin du XIX^e siècle revivent actuellement. Rangées dans les réserves du musée de l'algèbre triomphante, elles sont exhumées régulièrement par quelques archéologues des mathématiques (les géomètres !). Maintenant combinées avec les progrès fantastiques portés par la géométrie Riemannienne sur les groupes de Lie, elles permettent des avancées importantes dans le codage d'un logiciel de CAO. En seront-elles le futur ? On illustrera cela avec l'espace des Sphères de Lie, pour traiter le problème du solveur d'esquisses (construction naturelle de géométries sous contraintes), un des problèmes centraux de la modélisation.

1. Mathématiques et CAO

La CAO est au carrefour de 3 sciences : l'informatique, la mécanique et ... les mathématiques que l'ingénieur, s'il en a quelques mauvais souvenirs d'étude, figera dans sa mémoire. Pourtant elles sont l'alphabet et le langage dans lequel s'écrit forcément tout ce que nous faisons, puisque nous n'avons d'autre choix que de convertir en nombres notre monde réel pour le stocker dans un ordinateur. Les modèles de plus en plus performants ainsi implantés dans notre ordinateur donnent toujours plus de crédit à la pensée pythagoricienne (VI^e siècle av JC !) selon laquelle « tout serait nombre ». Il se trouve que les techniques mathématiques (géométrie) applicables dans notre domaine ont considérablement progressé à partir des idées initiales des grands géomètres de la deuxième moitié du XIX^e siècle (Gauss, Möbius, Poncelet, Plücker, Grassmann, Steiner, Chasles, Klein, Darboux,...), et surtout l'envolée triomphante des groupes de Lie et de la géométrie Riemannienne (Lie, Hadamard, Riemann, Cartan,...). Cette dernière est maintenant employée de façon très poussée et systématique

en physique fondamentale et appliquée (astronomie, laser, chimie moléculaire, ...). Ces techniques, difficiles et peu enseignées en école d'ingénieur, n'ont pas pour le moment pénétré réellement le monde industriel, et encore moins celui de la CAO. Pourtant elles conduisent à des innovations dont on ne sait pas réellement mesurer l'importance – par manque d'études – dans notre façon de coder un logiciel de CAO, et dans les bénéfices que l'on pourrait en attendre, tant du point de vue de la vitesse de calcul que de la simplicité naturelle induite pour l'utilisateur. Nous illustrerons cela à travers le problème de l'esquisse, ou comment dessiner de façon pratique un profil fait de points, lignes, arcs, qui sera à base de toute construction géométrique en CAO.

1.1. Les deux types de modèles en CAO. — Avant de décrire plus précisément le problème de l'esquisse et une des solutions possibles, il n'est pas inutile de revenir sur les deux types de modélisation qui coexistent en CAO, donnant lieu finalement à des représentations mathématiques différentes au sein des logiciels.

Il existe grosso modo deux objectifs pour un concepteur : faire du beau, du fluide (design : carrosserie de voiture, fuselage,...) parce que cela se voit ou doit avancer dans un milieu fluide, ou faire de la fonction : lien, mouvement (mur, poutre, boîte de vitesse, train d'atterrissage,...) parce que cela doit « tenir ou marcher ».

Design. — Il s'agit de modéliser géométriquement une forme, délimitée par des surfaces supportées par une structure topologique en fil de fer (complexe simplicial).



FIGURE 1. Intérieur de bateau (TopSolid) : rien n'est droit, tout est design et formes polynomiales.

Parce que le beau fait vendre, les surfaces doivent être harmonieuses, bien contrôlées en courbure, et se raccorder impeccablement (« pièces d'aspect »). L'école française est fière à juste titre des travaux pionniers de l'ingénieur Pierre Bézier chez Renault, et du mathématicien Paul De Casteljau chez Citroën, qui ont fait considérablement avancer la modélisation de ce type de formes. Et un premier croisement très fructueux