SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET GLOBALE DES STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES HOLOMORPHES RIGIDES

Sorin Dumitrescu

Panoramas et Synthèses

Numéro 35

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
34/35, 2011, p. 53–99

SUR L'UNIFORMISATION LOCALE ET GLOBALE DES STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES HOLOMORPHES RIGIDES

par

Sorin Dumitrescu

Résumé. – Nous présentons des résultats de classification pour des variétés complexes compactes possèdant des structures géométriques holomorphes rigides.

1. Introduction

1.1. Géométries de Klein. – Une *géométrie*, au sens de Klein, est un espace homogène G/I, où G est un groupe de Lie (de dimension finie) et I un sous-groupe fermé de G. Le groupe G est alors le groupe des symétries (isométries) de la géométrie et joue le rôle central suivant : deux parties de l'espace G/I seront considérées équivalentes si l'une est l'image de l'autre par une transformation appartenant au groupe G.

L'exemple type est celui de *la géométrie euclidienne*, associée au groupe des déplacements $G = O(n, \mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n$ et où le stabilisateur d'un point est le groupe *d'isotropie* $I = O(n, \mathbf{R})$. Comme le sous-groupe des translations $\mathbf{R}^n$ agit librement et transitivement sur G/I, un modèle de la géométrie euclidienne sera alors $\mathbf{R}^n$ muni de la forme quadratique définie positive standard $dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2$.

Autres exemples remarquables de géométries (présentées sous leurs versions complexes) sont :

- *la géométrie riemannienne holomorphe plate*, obtenue pour $G = O(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ et $I = O(n, \mathbf{C})$. Un modèle de cette géométrie est $\mathbf{C}^n$ muni de la forme quadratique complexe non dégénérée $dz_1^2 + \ldots + dz_n^2$. *Il s'agit de la version holomorphe de la géométrie euclidienne.*

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 53B21, 53B30, 53C56, 53A55.
Mots clefs. – Structures géométriques rigides, variétés complexes, champs de Killing locaux.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

© Panoramas et Synthèses 34/35, SMF 2011

– *la géométrie affine complexe* obtenue pour $G = GL(n, \mathbf{C}) \ltimes \mathbf{C}^n$ et $I = GL(n, \mathbf{C})$. L'action de G sur $\mathbf{C}^n$ préserve les droites complexes parcourues à vitesse constante.
– *la géométrie projective complexe*, où G est le groupe de transformations projectives de l'espace projectif complexe $P^n(\mathbf{C})$ et I est le stabilisateur d'un point. Dans ce cas G préserve les droites projectives, sans respecter le paramétrage.

Gauss et Riemann sont les premiers à avoir introduit et étudié l'objet infinitésimal associé à la géométrie euclidienne : en langage moderne, *une métrique riemannienne* sur une variété est un champ lisse de formes quadratiques définies positives sur l'espace tangent.

Postérieurement, dans un vaste programme de généralisation, Cartan a réussi à définir les objets infinitésimaux associés aux géométries de Klein G/I et qui sont, à ces géométries, ce que les métriques riemanniennes sont à la géométrie euclidienne [**69**]. Par exemple, *une connexion affine holomorphe* est la généralisation infinitésimale de la géométrie affine complexe et *une connexion projective holomorphe* est la généralisation infinitésimale de la géométrie projective complexe.

Cartan associe à ces objets un tenseur de courbure qui s'annule si et seulement si l'objet infinitésimal est *plat*, autrement dit localement équivalent à G/I.

Cartan et Lie ont longuement étudié les symétries (isométries) de ces objets infinitésimaux.

Ehresmann est celui qui a posé le cadre moderne intrinsèque dans lequel ces *structures géométriques* infinitésimales se définissent [**23**]. La définition de structure géométrique, dégagée par Ehresmann (suite aux travaux précurseurs de Cartan) et reprise fructueusement par Gromov dans [**31**], est présentée dans la suite et sera amplement revisitée au chapitre 3.

1.2. Structures géométriques holomorphes. – Commençons par donner la définition d'une structure géométrique d'après [**14, 31**], dans le contexte holomorphe qui sera discuté dans ce texte.

Considérons une variété complexe M de dimension n. Rappelons que, pour tout entier positif r, le groupe D^r, des r-jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux de $\mathbf{C}^n$ qui fixent 0, est un groupe linéaire algébrique qui coïncide avec $GL(n, \mathbf{C})$, pour $r = 1$, et avec une extension de $GL(n, \mathbf{C})$ par le groupe additif des formes bilinéaires symétriques sur $\mathbf{C}^n$, si $r = 2$.

Le fibré des r-repères $R^r(M)$ de M, autrement dit le fibré des r-jets en 0 de germes de biholomorphismes locaux, centrés en 0, entre $\mathbf{C}^n$ et M, est un fibré principal au-dessus de M, de groupe structural D^r. Nous suivons [**14, 31**] et donnons la

Définition 1.1. – *Une structure géométrique holomorphe ϕ (d'ordre r) sur M est une application holomorphe, D^r-équivariante, $\phi : R^r(M) \to Z$, avec Z une variété algébrique munie d'une action algébrique de D^r. Si Z est une variété affine, alors la structure géométrique ϕ est dite de type algébrique affine.*

L'application ϕ s'interprète comme une section holomorphe du fibré de fibre Z, associé au fibré principal $R^r(M)$ via l'action de D^r sur Z.

Exemple. – Si $r = 1$ et Z est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire de $GL(n, \mathbf{C})$, alors ϕ est un *tenseur holomorphe*. Il s'agit d'une structure géométrique de type algébrique affine. On dira, avec Bogomolov [**10, 9**], que ϕ est *de type général*, s'il existe un point dans l'image de ϕ dans Z dont le stabilisateur est un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbf{C})$.

Un biholomorphisme local f de M agit naturellement sur les sections du fibré précédent. Si cette action préserve ϕ, alors f est une *isométrie locale* de ϕ. Si les isométries locales agissent transitivement sur M, alors la structure géométrique ϕ est dite *localement homogène*.

Si l'image de ϕ dans Z est exactement une D^r-orbite, qui s'identifie alors à un espace homogène D^r/G, où G est le sous-groupe de D^r qui stabilise un point de l'image, alors ϕ s'interprète comme une section d'un fibré de fibre D^r/G. Cette section fournit une réduction du groupe structural de $R^r(M)$ au sous-groupe G. Une telle structure géométrique est dite une *G-structure holomorphe* [**44**].

La structure géométrique ϕ est dite *rigide*, au sens de Gromov [**14, 31**], si une isométrie locale est déterminée par un jet d'ordre fini. Le pseudo-groupe des isométries locales d'une structure géométrique rigide est un pseudo-groupe de Lie de dimension finie, engendré par une algèbre de Lie de dimension finie appelée *algèbre de Lie des champs de Killing locaux.*

Présentons maintenant des exemples importants de structures géométriques holomorphes rigides qui sont des G-structures.

- Si $r = 1$ et $G = \{Id\}$, on est en présence d'une trivialisation holomorphe du fibré tangent holomorphe. Une telle structure est aussi appelée *parallélisme holomorphe* et, dans ce cas, la variété M est dite *parallélisable.*
- Si $r = 1$ et $G = O(n, \mathbf{C})$, on est en présence d'une *métrique riemannienne holomorphe* qui est l'équivalent, dans le contexte complexe, d'une métrique riemannienne. Il s'agit de la version infinitésimale de la géométrie riemannienne holomorphe plate.
- Si $r = 1$ et $G = \mathbf{C}^* \ltimes O(n, \mathbf{C})$ est le groupe des similitudes linéaires complexes, on est en présence d'une *structure conforme holomorphe.* Il s'agit d'une structure géométrique rigide, dès que n est supérieur ou égal à trois.
- Soit $r = 2$ et considérons le sous-groupe G de D^2, isomorphe à D^1, constitué par les 2-jets en 0 d'isomorphismes linéaires de $\mathbf{C}^n$. Cette G-structure est une *connexion affine holomorphe sans torsion.*
- Soit $r = 2$ et G le sous-groupe de D^2, constitué par les 2-jets en 0 de transformations projectives de $P^n(\mathbf{C})$ qui fixent 0. Il s'agit d'une *connexion projective holomorphe normale.*

Remarque 1. – *Les parallélismes et les connexions affines sont des structures géométriques de type algébrique affine, mais pas les structures conformes, ni les connexions projectives.*

La définition précédente des connexions affines et projectives, vues comme G-structures est classique [**45**]. Le lecteur pourra également se référer à [**60**], pour voir que la définition précédente coïncide avec celle issue de la théorie des faisceaux et adoptée dans [**34, 46, 47**].

Des nombreux résultats montrent que les G-structures holomorphes sur les variétés compactes ont tendance a être localement homogènes (et même plates dans le cas des variétés kählériennes) [**37**], [**39**], [**57**], [**74**], [**16**], [**19**], [**17**].

Le plus instructif dans ce sens nous semble le résultat suivant dû à Wang [**74**] (voir la preuve un peu plus tard).

***Théorème 1.2* (Wang)**. – *Soit M une variété complexe compacte connexe admettant un parallélisme holomorphe. Alors M est un quotient d'un groupe de Lie complexe connexe simplement connexe G par un réseau cocompact Γ. De plus, M est kählérienne si et seulement si G est abélien (et M est un tore complexe).*

Rappelons aussi les théorèmes suivants qui seront prouvés et généralisés à la section 4 :

***Théorème 1.3* (Inoue, Kobayashi, Ochiai)**. – *Soit M une variété kählérienne compacte et connexe, munie d'une connexion affine holomorphe ∇. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ∇ est invariante par translations.*

***Théorème 1.4* (Bogomolov, Yau)**. – *Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'un tenseur holomorphe de type général ϕ. Alors M admet un revêtement fini non ramifié qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est un tenseur invariant par translations.*

Ce texte présente un survol des théorèmes de classification pour les variétés complexes *compactes M* admettant des structures géométriques holomorphes *rigides ϕ* (qui unifient et généralisent les résultats précédents).

Par exemple, dans le contexte des variétés kählériennes nous démontrons :

Théorème 1.5. – *Soit M une variété kählérienne compacte connexe dont la première classe de Chern est nulle, munie d'une structure géométrique holomorphe de type affine ϕ. Alors ϕ est localement homogène.*

Si, de plus, ϕ est rigide, alors M admet un revêtement fini qui est un tore complexe et sur lequel l'image réciproque de ϕ est invariante par translations.