SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS MARIE

1962

COHOMOLOGIE LOCALE DES FAISCEAUX COHÉRENTS ET THÉORÈMES DE LEFSCHETZ LOCAUX ET GLOBAUX

(SGA 2)

Alexander Grothendieck

(rédigé par un groupe d'auditeurs)

Augmenté d'un exposé de
Mme Michèle Raynaud

***Édition recomposée et annotée du volume 2
des Advanced Studies in Pure Mathematics
publié en 1968 par North-Holland Publishing Company***

Documents Mathématiques

série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën
Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1629-4939

ISBN 2-85629-169-4

Directrice de la publication : Marie-Françoise ROY

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 4

SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS MARIE
1962

COHOMOLOGIE LOCALE DES FAISCEAUX COHÉRENTS ET THÉORÈMES DE LEFSCHETZ LOCAUX ET GLOBAUX

(SGA 2)

Alexander Grothendieck

(rédigé par un groupe d'auditeurs)

Augmenté d'un exposé de
Mme Michèle Raynaud

Édition recomposée et annotée du volume 2
des Advanced Studies in Pure Mathematics
publié en 1968 par North-Holland Publishing Company

Société Mathématique de France 2005

PRÉFACE

Le présent texte est une édition recomposée et annotée du livre « Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2) », Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968, par A. Grothendieck *et al.* C'est le deuxième volet du projet entamé par B. Edixhoven qui a réédité SGA 1. Cette version reproduit le texte original avec d'une part quelques modifications de forme corrigeant des erreurs typographiques et d'autre part des commentaires en bas de page, dits « notes de l'éditeur » (N.D.E.), précisant l'état actuel des connaissances sur les questions soulevées dans la version originale. On a en outre donné ça et là quelques détails supplémentaires sur les preuves. Pour éviter des risques de confusion, les notes originales conservent leur système de numérotation par des étoiles alors que les nouvelles sont numérotées avec des nombres entiers. Les numéros de page de la version originale sont indiqués dans la marge.

Je remercie les mathématiciens qui ont assuré l'essentiel de la saisie initiale en LaTeX2e, à savoir L. Bayle, N. Borne, O. Brinon, J. Buresi, M. Chardin, F. Ducrot, P. Graftiaux, F. Han, P. Karwasz, L. Koelblen, D. Madore, S. Morel, D. Naie, B. Osserman, J. Riou et V. Sécherre ainsi que C. Sabbah pour avoir mis ce texte au format de la SMF. Je remercie également J.-B. Bost, P. Colmez, O. Gabber, W. Fulton, S. Kleiman, F. Orgogozo, M. Raynaud et J.-P. Serre pour leurs commentaires et conseils.

L'éditeur, Yves Laszlo.

The present text is a new updated edition of the book “Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)”, Advanced Studies in Pure Mathematics 2, North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1968, by A. Grothendieck *et al.* It is the second part of the SGA project initiated by B. Edixhoven who made a new edition of SGA 1. This version is meant to reproduce the original text with some modifications including minor typographical corrections and footnotes from the editor (N.D.E.) explaining the current status of questions raised in the first edition. One has also given more details about some proofs. To avoid possible confusion, the original footnotes are numbered using stars whereas the new ones are numbered using integers. The page numbers of the original version are written in the margin of the text.

Let me thank the mathematicians who have done most of the initial typeseting in LaTeX2e, namely L. Bayle, N. Borne, O. Brinon, J. Buresi, M. Chardin, F. Ducrot, P. Graftiaux, F. Han, P. Karwasz, L. Koelblen, D. Madore, S. Morel, D. Naie, B. Osserman, J. Riou and V. Sécherre and also C. Sabbah for having adapted this text to the SMF layout. Let me thank also J.-B. Bost, P. Colmez, O. Gabber, W. Fulton, S. Kleiman, F. Orgogozo, M. Raynaud and J.-P. Serre for their comments and advice.

The editor, Yves Laszlo.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Nous présentons ici, sous forme révisée et complétée, une réédition par photo-offset du deuxième Séminaire de Géométrie Algébrique de l'Institut des Hautes Études Scientifiques tenu en 1962 (miméographié). 1

Le lecteur se reportera à l'Introduction au premier de ces Séminaires (cité SGA 1 par la suite) pour les buts que poursuivent ces séminaires, et leurs relations avec les Éléments de Géométrie Algébrique.

Le texte des exposés I à XI a été rédigé à mesure, d'après mes exposés oraux et notes manuscrites, par un groupe d'auditeurs, comprenant I. Giorgiutti, J. Giraud, Mlle M. Jaffe (devenue Mme M. Hakim) et A. Laudal. Ces notes à l'origine étaient considérées comme devant être provisoires et à circulation très limitée, en attendant leur absorption par les EGA (absorption devenue maintenant pour le moins problématique, tout comme pour les autres parties des SGA). Comme il était dit dans l'avertissement à l'édition primitive, ce caractère « confidentiel » des notes devait excuser certaines « faiblesses de style », sans doute plus manifestes dans le présent Séminaire SGA 2 que dans les autres. J'ai essayé dans la mesure du possible d'y obvier dans la présente réédition, par une révision relativement serrée du texte initial. J'ai notamment harmonisé les systèmes de numérotation des énoncés, employés dans les différents exposés, en introduisant partout le même système décimal, déjà utilisé dans la plupart des exposés primitifs du présent SGA 2, ainsi que dans toutes les autres parties des SGA. Cela m'a amené en particulier à revoir entièrement la numérotation[(1)] des énoncés des exposés III à VIII, (et par conséquent, des références 2

[(1)] N.D.E. : on a conservé au maximum la numérotation originale, rajoutant l'adverbe bis quand des doublons ambigus se produisaient ça et là.

auxdits exposés)[*]. J'ai essayé également d'extirper du texte primitif les principales erreurs de dactylographie ou de syntaxe (qui étaient nombreuses et gênantes). De plus, Mme M. Hakim a bien voulu se charger de réécrire l'exposé IV dans un style moins télégraphique que l'exposé initial. Comme dans les autres rééditions des SGA, j'ai également ajouté un certain nombre de notes de bas de page, soit pour donner des références supplémentaires, soit pour signaler l'état d'une question pour laquelle des progrès ont été faits depuis la rédaction du texte primitif. Enfin, ce Séminaire a été augmenté d'un nouvel exposé, à savoir l'exposé XIV, rédigé par Mme Michèle Raynaud en 1967, qui reprend et complète des suggestions contenues dans les « Commentaires à l'Exposé XIII » (XIII 6) (rédigés en Mars 1963). Cet exposé reprend les théorèmes du type Lefschetz du point de vue de la cohomologie étale, en utilisant les résultats sur la cohomologie étale exposés dans SGA 4 et SGA 5 (à paraître dans cette même collection Series in Pure Mathematics)[2] ; il est donc à ce titre de nature moins « élémentaire » que les autres exposés du présent volume, qui n'utilisent guère plus que la substance des chapitres I à III des EGA. Voici une esquisse du contenu du présent volume. L'exposé I contient le sorite de la « cohomologie à support dans Y » $\mathrm{H}^*_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}, \mathrm{F})$, où Y est un fermé d'un espace X, cohomologie qui peut s'interpréter comme une cohomologie de X *modulo* l'ouvert $\mathrm{X} - \mathrm{Y}$, et qui est l'aboutissement d'une fort utile « *suite spectrale de passage du local au global* » I 2.6, faisant intervenir des *faisceaux* de cohomologie « à support dans Y » $\underline{\mathrm{H}}^*_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$[3]. Ce formalisme peut dans
3 de nombreuses questions jouer un rôle de « localisation » analogue à celui joué par la considération de voisinages « tubulaires » de Y en géométrie différentielle. L'exposé II étudie les notions précédentes dans le cas des faisceaux quasi-cohérents sur les préschémas, l'exposé III donne leur relation avec la notion classique de *profondeur* (III 3.3).

Les exposés IV et V donnent des notions de *dualité locale*, qu'on peut comparer au théorème de dualité projective de Serre (XII 1.1) ; signalons que ces deux types de théorèmes de dualité sont généralisés de façon substantielle dans le séminaire de Hartshorne (cité en note de bas de page à la fin de Exp. IV)[4]

---

[*] Il va sans dire que toutes les références à SGA 2 qui figurent dans les parties des SGA publiées dans la Series in Pure Mathematics se rapporteront au présent volume, et non à l'édition primitive de SGA 2 !

[2] N.D.E. : en fait, ces séminaires sont publiés chez Springer (numéros 269, 279, 305 et 589), mais, hélas, sont épuisés.

[3] N.D.E. : on a conservé les notations soulignées pour les versions faisceautisées de foncteurs, l'analogue calligraphique de Γ n'étant pas clair.

[4] N.D.E. : le livre de Hartshorne comporte des erreurs de signes et surtout ne prouve pas vraiment la compatibilité de la trace au changement de base. Conrad a complètement repris ce travail, en prouvant cette compatibilité, cruciale et hautement non triviale (*Grothendieck duality and base change*, Lect. Notes in Math., vol. 1750, Springer-Verlag, Berlin, 2000). Hélas, des erreurs subsistent (cf. deux prépublications (Conrad B., « Clarifications and corrections to "*Grothendieck duality and*

Les exposés VI et VII donnent des notions techniques faciles, utilisées dans l'exposé VIII pour prouver le *théorème de finitude* (VIII 2.3), donnant des conditions nécessaires et suffisantes, pour un faisceau cohérent F sur un schéma noethérien X, pour que les faisceaux de cohomologie locale $\underline{\mathrm{H}}^i_{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$ soient cohérents pour $i \leqslant n$ (ou ce qui revient au même, pour que les faisceaux $\mathrm{R}^i f_*(\mathrm{F}|\mathrm{X}-\mathrm{Y})$ soient cohérents pour $i \leqslant n-1$, où $f \colon \mathrm{X}-\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est l'inclusion). Ce théorème est un des résultats techniques centraux du Séminaire, et nous montrons dans l'exposé IX comment un théorème de cette nature peut être utilisé, pour établir un « théorème de comparaison » et un « théorème d'existence » en géométrie formelle, en calquant et généralisant l'utilisation faite dans (EGA III §§ 4 et 5) du théorème de finitude pour un morphisme propre.

On applique ces derniers résultats dans X et XI, consacrés respectivement à des théorèmes du type Lefschetz pour le groupe fondamental, et pour le groupe de Picard. 4
Ces théorèmes consistent à comparer sous certaines conditions les invariants (π_1 ou Pic) attachés respectivement à un schéma X et à un sous-schéma Y (jouant le rôle d'une section hyperplane), et à donner notamment des conditions où ils sont isomorphes. Grosso modo, les hypothèses faites servent à passer de Y au complété formel de X le long de Y, et à pouvoir appliquer ensuite les résultats de IX pour passer de là à un *voisinage* ouvert U de Y dans X. Pour pouvoir passer de U à X, il faut disposer encore de renseignements (type « pureté » ou « parafactorialité ») pour les anneaux locaux de X en les points de $\mathrm{Z} = \mathrm{X} - \mathrm{U}$, (qui est un ensemble fini discret dans les cas envisagés). Ceci explique l'interaction dans les démonstrations des exposés X, XI, XII entre les résultats locaux et globaux, notamment dans certaines récurrences. Les résultats principaux obtenus dans X et XI sont les théorèmes *de nature locale* X 3.4 (*théorème de pureté*) et XI 3.14 (*théorème de parafactorialité*). On notera que ces théorèmes sont démontrés par des techniques cohomologiques, de nature essentiellement globale. Dans XII on obtient en utilisant les résultats locaux précédents, les variantes globales de ces résultats pour des schémas projectifs sur un corps, ou plus généralement sur un schéma de base plus ou moins quelconque ; parmi les énoncés typiques, signalons XII 3.5 et XII 3.7.

Dans XIII, nous passons en revue quelques uns des nombreux problèmes et conjectures suggérés par les résultats et méthodes du Séminaire. Les plus intéressants peut-être concernent les théorèmes du type Lefschetz cohomologiques et homotopiques pour

---

base change" » et « An addendum to Chapter 5 of "*Grothendieck duality and base change*" »)). Pour un aspect plus concret, avec une attention toute particulière à la notion de résidu, voir les travaux de Lipman, en particulier (Lipman J., *Dualizing sheaves, differentials and residues on algebraic varieties*, Astérisque, vol. 117, Société mathématique de France, 1984). Une preuve catégorique du théorème de dualité, basée sur le théorème de représentabilité de Brown, a été obtenue par Neeman (Neeman A., « The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), n° 1, p. 205–236).

les espaces analytiques complexes, cf. XIII pages 26 et suivantes[5]. Dans le contexte
5 de la cohomologie étale des schémas, les conjectures correspondantes sont prouvées dans XIV par une technique de dualité qui devrait s'appliquer également dans le cas analytique complexe (cf. commentaires XIII p. 25 et XIV 6.4). Mais les énoncés homotopiques correspondants dans le cas des espaces analytiques (et plus particulièrement les énoncés faisant intervenir le groupe fondamental) semblent exiger des techniques entièrement nouvelles (cf. XIV 6.4).

Je suis heureux de remercier tous ceux qui, à des titres divers, ont aidé à la parution du présent volume, dont les collaborateurs déjà cités dans cette Introduction. Plus particulièrement, je tiens à remercier Mlle Chardon pour la bonne grâce avec laquelle elle s'est acquittée de la tâche ingrate que constitue la préparation matérielle du manuscrit définitif pour la photo-offset.

Bures-sur-Yvette, Avril 1968
A. Grothendieck.

[5] N.D.E. : essentiellement toutes les conjectures énoncées en XIII et XIV sont maintenant prouvées ; voir les notes de bas de page de ces sections pour des références et commentaires.

EXPOSÉ I

LES INVARIANTS COHOMOLOGIQUES GLOBAUX ET LOCAUX RELATIFS À UN SOUS-ESPACE FERMÉ

1. Les foncteurs Γ_Z, $\underline{\Gamma}_Z$

Soient X un espace topologique, $\underline{C}_X$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X. Soient 6
Φ une famille de supports au sens de Cartan on définit le foncteur Γ_Φ sur $\underline{C}_X$ par :

(1) $\Gamma_\Phi(F) =$ sous-groupe de $\Gamma(F)$ formé des sections f telles que support $f \in \Phi$.

Si Z est une partie fermée de X, nous désignons par abus de langage par $\underline{\Gamma}_Z$ le foncteur Γ_Φ, où Φ est l'ensemble des parties fermées de X contenues dans Z. Donc on a :

(2) $\Gamma_Z(F) =$ sous-groupe de $\Gamma(F)$ formé des sections f telles que support $f \subset Z$.

Nous voulons généraliser cette définition au cas où Z est une partie *localement fermée* de X, donc fermée dans une partie ouverte convenable V de X. On posera dans ce cas :

$$\Gamma_Z(F) = \Gamma_Z(F_{|V}). \tag{3}$$

Il faut vérifier que $\Gamma_Z(F)$ « ne dépend pas » de l'ouvert choisi. Il suffit de montrer que si V', $V \supset V' \supset Z$ est un ouvert, alors l'application $\rho^V_{V'} : F(V) \to F(V')$ applique $\Gamma_Z(F_{|V})$ isomorphiquement sur $\Gamma_Z(F_{|V'})$. Or

$$\Gamma_Z(F_{|V}) = \ker \rho^V_{V-Z} \tag{4}$$

donc si $f \in \Gamma_Z(F_{|V})$ et si $\rho^V_{V'}(f) = \rho^V_{V-Z}(f) = 0$ alors $f = 0$ puisque $(V', V-Z)$ est un recouvrement de V. De même, si $f' \in \Gamma_Z(F_{|V'})$, alors $f' \in F(V')$ et $0 \in$ 7
$F(V-Z)$ définissent un $f \in F(V)$ tel que $\rho^V_{V'}(f) = f', f \in \Gamma_Z(F_{|V})$, donc $\rho^V_{V'}$ induit un isomorphisme $\Gamma_Z(F_{|V}) \to \Gamma_Z(F_{|V'})$.

Notons que tout ouvert W de Z est induit par un ouvert U de X dans lequel W est fermé. Il en résulte que $W \mapsto \Gamma_W(F)$ définit un préfaisceau sur Z, et on vérifie que c'est un faisceau que l'on notera $i^!(F)$, où $i : Z \to X$ est l'immersion canonique. On trouve :

$$\Gamma_Z(F) = \Gamma(i^!(F)). \tag{5}$$