Wendelin Werner
Ellen Powell

LECTURE NOTES ON THE GAUSSIAN FREE FIELD

COURS SPÉCIALISÉS 28

Société Mathématique de France 2021

COURS SPÉCIALISÉS 28

Comité de rédaction

Raphaël CÔTE
Cyril DEMARCHE
Romain DUJARDIN
Sophie GRIVAUX
Olivier GUICHARD
Thierry LÉVY
Bertrand MAURY
Alain VALETTE

Julie DÉSERTI (rédactrice en chef)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

Amer. Math. Soc.
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs 2021

Vente au numéro : 43 € (hors Europe $ 65)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 Fax : (33) 01 40 46 90 96
cours_specialise@smf.emath.fr http://smf.emath.fr/

© Société Mathématique de France 2021

Tous droits réservés (article L 122–4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335–2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090
ISBN 978-2-85629-952-4

Directeur de la publication : Fabien DURAND

COURS SPÉCIALISÉS 28

LECTURE NOTES ON THE GAUSSIAN FREE FIELD

Wendelin Werner
Ellen Powell

Société Mathématique de France 2021

W. Werner
ETH Zürich, D-Math
Ramistr. 101, 8092 Zürich, Switzerland.
E-mail : wendelin.werner@math.ethz.ch

E. Powell
Durham University, Department of Mathematics,
Upper Mountjoy, Stockton Road, Durham, DH13LE, United Kingdom.
E-mail : ellen.g.powell@durham.ac.uk

2000 *Mathematics Subject Classification.* — 60G60, 60G15, 60J67, 82B20, 82B21.

Key words and phrases. — Gaussian free field, local sets, Markov properties, loop-soups, Brownian loop-soups, Schramm–Loewner Evolution.

Mots clefs. — Champ libre gaussien, ensembles locaux, propriété de Markov, soupes de lacets, processus SLE.

The authors acknowledge the support of the Grant 175505 of the Swiss National Science Foundation. EP also thanks the FIM of ETH Zürich, for support during visits in 2019-2020.

LECTURE NOTES ON THE GAUSSIAN FREE FIELD

Wendelin Werner, Ellen Powell

Abstract. — The Gaussian Free Field (GFF) in the continuum appears to be the natural generalisation of Brownian motion, when one replaces time by a multidimensional continuous parameter. While Brownian motion can be viewed as the most natural random real-valued function defined on $\mathbb{R}_+$ with $B(0) = 0$, the GFF in a domain D of $\mathbb{R}^d$ for $d \geq 2$ is a natural random real-valued generalised function defined on D with zero boundary conditions on ∂D. In particular, it is not a random continuous function.

The goal of these lecture notes is to describe some aspects of the continuum GFF and of its discrete counterpart defined on lattices, with the aim of providing a gentle self-contained introduction to some recent developments on this topic, such as the relation between the continuum GFF, Brownian loop-soups and the Conformal Loop Ensembles CLE_4.

This is an updated and expanded version of the notes written by the first author (WW) for graduate courses at ETH Zürich (Swiss Federal Institute of Technology in Zürich) in 2014 and 2018. It has benefited from the comments and corrections of students, as well as of a referee; we thank them all very much. The exercises that are interspersed in the first half of these notes mostly originate from the exercise sheets prepared by the second author (EP) for this course in 2018.

***Résumé* (Notes de cours sur le champ libre gaussien).** — Le champ libre gaussien dans le continu est la généralisation naturelle du mouvement brownien, lorsque l'on remplace l'axe temporel par un ensemble multidimensionnel. Tandis que le mouvement brownien peut être considéré comme étant la fonction aléatoire réelle continue telle que $B(0) = 0$ la plus naturelle, le champ libre défini sur un domaine D de $\mathbb{R}^d$ est une fonction généralisée (au sens des distributions) réelle aléatoire naturelle Γ définie sur D telle que $\Gamma = 0$ sur ∂D. En particulier, ce n'est pas une fonction continue aléatoire.

Le but de ces notes de cours est de décrire divers aspects du champ libre gaussien dans le continu, ainsi que de ses analogues discrets définis sur des réseaux, afin de donner une introduction autonome à des développements récents sur ces thèmes, comme la relation entre le champ libre gaussien, les soupes de lacets browniens et (en dimension deux) les ensembles conformes de boucles CLE_4.

Ces notes sont une version complétée des notes de cours rédigées par le premier auteur (WW) pour des cours avancés à l'ETH de Zürich (École polytechnique fédérale de Zurich) en 2014 et 2018. Elles ont ainsi bénéficié des commentaires et corrections d'étudiants, ainsi que d'un rapporteur anonyme que nous remercions. Les exercises qui figurent dans la première partie du cours correspondent à des feuilles d'exercises préparées par le second auteur (EP) pour ce cours en 2018.

© Cours Spécialisés 28, SMF 2021

CONTENTS

Overview 1

0. Warm-up 5
0.1. Conditioned random walks 5
0.2. Concrete examples in the discrete square 8

1. The discrete GFF 13
1.1. Definition 13
1.2. Informal comments about the possible scaling limit 19
1.3. Variations on the Markov property 21
1.4. Determinant of the Laplacian 30
1.5. GFF on other graphs 32

2. Loop-soups and the discrete GFF 37
2.1. Uniform spanning trees and Wilson's algorithm 37
2.2. The occupation time fields in Wilson's algorithm 42
2.3. Discrete-time loop-soups and their occupation times 46
2.4. Continuous-time loop-soups and their occupation times 55
2.5. Resampling and Markovian properties of unoriented loop-soups 59
2.6. A quick survey of the GFF and loop-soups on cable graphs 67

3. The continuum GFF 75
3.1. Definition of the continuum GFF 76
3.2. A closer look at the continuum Green's function 81
3.3. First comments on the regularity of the GFF 89
3.4. Relation with Brownian loop-soups (a non-rigorous warm-up) 97

4. The Markov property and local sets in the continuum 105
4.1. The Markov property 105
4.2. Local sets of the continuum GFF 109

5. Topography of the continuum Gaussian Free Field 125
5.1. Warm-up and overview 125
5.2. Deterministic Loewner chains background 128
5.3. SLE_4, harmonic measure martingales and coupling with the GFF 130
5.4. SLE_4 is a deterministic function of the GFF 135
5.5. Variants of this coupling result 138
5.6. CLE_4 and the GFF 141
5.7. Constructing a GFF as a nested CLE_4 144
5.8. Brownian loop-soup and CLE_4 — the three couplings are the same 145
5.9. Some related couplings 146

6. Quick review of further related results 149
6.1. Liouville quantum gravity 149
6.2. GFF with Neumann boundary conditions and on compact surfaces 154
6.3. Quantum zipper and LQG 158
6.4. The scaling limit of Wilson's algorithm in 2D 161

Bibliography 167