

**CORRESPONDANCE
GROTHENDIECK-SERRE**

éditée par

Pierre Colmez

et

Jean-Pierre Serre

Documents Mathématiques
série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2005

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN En cours

ISBN 2-85629-104-X

Directeur de la publication : Marie-Françoise ROY

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 2

**CORRESPONDANCE
GROTHENDIECK-SERRE**

éditée par

Pierre Colmez

et

Jean-Pierre Serre

Société Mathématique de France 2005

TABLE DES MATIÈRES

<i>Préface</i>	ix
<i>Correspondance</i>	1
A. Grothendieck, 28 janvier 1955	1
A. Grothendieck, 18 février 1955	3
J-P. Serre, 26 février 1955	7
A. Grothendieck, 26 février 1955	11
J-P. Serre, 12 mars 1955	15
A. Grothendieck, 4 juin 1955	16
J-P. Serre, 13 juillet 1955	17
A. Grothendieck, 15 décembre 1955	19
J-P. Serre, 22 décembre 1955	21
A. Grothendieck, 12 janvier 1956	24
A. Grothendieck, 16 janvier 1956	26
A. Grothendieck, 30 janvier 1956	28
J-P. Serre, 2 février 1956	30
A. Grothendieck, 16 février 1956	32
A. Grothendieck, 8 mars 1956	34
J-P. Serre, 14 mars 1956	38
A. Grothendieck, 10 avril 1956	40
A. Grothendieck, 23 juillet 1956	42
A. Grothendieck, 1 ^{er} septembre 1956	43
A. Grothendieck, 19 septembre 1956	45
J-P. Serre, 23 septembre 1956	47
A. Grothendieck, 13 novembre 1956	49
J-P. Serre, 17 novembre 1956	52

A. Grothendieck, 22 novembre 1956	53
J-P. Serre, 4 décembre 1956	55
A. Grothendieck, 1 ^{er} novembre 1957	57
A. Grothendieck, 12 novembre 1957	59
A. Grothendieck, 17 octobre 1958	63
J-P. Serre, 22 octobre 1958	64
A. Grothendieck, 5 novembre 1958	66
J-P. Serre, 9 novembre 1958	68
A. Grothendieck, 18 juillet 1959	75
A. Grothendieck, 18 août 1959	79
J-P. Serre, 25 octobre 1959	84
A. Grothendieck, 31 octobre 1959	88
A. Grothendieck, 5 novembre 1959	94
J-P. Serre, 13 novembre 1959	98
J-P. Serre, 15 novembre 1959	102
A. Grothendieck, 9 août 1960	104
J-P. Serre, 20 septembre 1961	110
A. Grothendieck, 1 ^{er} octobre 1961	111
A. Grothendieck, 19 octobre 1961	116
A. Grothendieck, 22 octobre 1961	121
J-P. Serre, 26 octobre 1961	124
A. Grothendieck, 31 octobre 1961	128
A. Grothendieck, 6 septembre 1962	131
J-P. Serre, 7 septembre 1962	132
J-P. Serre, septembre 1962, mardi soir	134
A. Grothendieck, 12 septembre 1962	134
J-P. Serre, septembre 1962, vendredi matin	135
J-P. Serre, septembre 1962, vendredi soir	137
A. Grothendieck, 10 avril 1963	139
J-P. Serre, avril 1963	143
J-P. Serre, 31 mars 1964	145
J-P. Serre, 1 ^{er} avril 1964	146
A. Grothendieck, 2 avril 1964	148
J-P. Serre, 2–3 août 1964	149
A. Grothendieck, 8 août 1964	165
J-P. Serre, 8 août 1964	166
J-P. Serre, 13 août 1964	169
A. Grothendieck, 16 août 1964	172
J-P. Serre, août 1964	176
A. Grothendieck, 5 septembre 1964	178

J-P. Serre, 8 septembre 1964	180
A. Grothendieck, 9 septembre 1964	181
A. Grothendieck, 24 septembre 1964	182
J-P. Serre, 30 septembre 1964	187
A. Grothendieck, 30 septembre 1964	189
A. Grothendieck, 3-5 octobre 1964	201
J-P. Serre, octobre 1964	210
A. Grothendieck, 30 octobre 1964	214
A. Grothendieck, 1 ^{er} novembre 1964	221
J-P. Serre, 8 novembre 1964	222
J-P. Serre, 9 novembre 1964	225
J-P. Serre, 14 novembre 1964	227
J-P. Serre, Mercredi après-midi	228
J-P. Serre, 2 mai 1965	230
A. Grothendieck, 27 août 1965	232
J-P. Serre, 7 décembre 1966	235
A. Grothendieck, 15 janvier 1969	239
A. Grothendieck, 2 septembre 1984	242
J-P. Serre, 23 juillet 1985	243
A. Grothendieck, 25 juillet 1985	247
J-P. Serre, 8 février 1986	249
J-P. Serre, 31 décembre 1986	251
A. Grothendieck, 25 janvier 1987	253
<i>Notes</i>	255
<i>Bibliographie</i>	283
<i>Index</i>	287

PRÉFACE

Le présent volume de « Documents Mathématiques » reproduit une grande partie de ma correspondance avec Grothendieck entre 1955 et 1970.

J'ai choisi celles de nos lettres qui m'ont paru les plus propres à intéresser le lecteur, soit d'un point de vue purement mathématique, soit d'un point de vue historique.

Bien entendu, ce choix est loin de représenter l'ensemble des questions dont Grothendieck et moi avons discuté pendant les quinze années en question : lorsque nous nous trouvions tous deux à Paris, le téléphone était notre mode de communication le plus fréquent. Les lettres reflètent plutôt les périodes où nous étions séparés : l'un de nous à Princeton ou Harvard, et l'autre à Paris.

J'ai également incorporé quelques-unes des lettres que nous avons échangées entre 1984 et 1987, au moment de la rédaction de *Récoltes et Semailles*.

Les seuls changements apportés aux textes originaux sont les suivants :

- suppression des abréviations, du genre « com. » pour « commutatif » ;
- correction des fautes d'orthographe, ainsi que des fautes de frappe évidentes ;
- suppression de certains passages trop personnels⁽¹⁾, remplacés par des points de suspension entre crochets [...].

Par contre, les énoncés faux ont été conservés tels quels. Ils sont rectifiés (autant qu'il m'a été possible de le faire) dans des *Notes*, placées à la fin du

⁽¹⁾A titre de curiosité, voici l'un des passages supprimés, relatif à un mathématicien que j'appellerai X : « ... la prose dégueulasse de X, grand maître sorcier devant l'autre aux horreurs, qui se garde bien, évidemment, de rédiger un petit papier clair où les énoncés serviables (sic) figureraient dans une forme pigeable ... » On comprendra que j'aie voulu épargner à X la lecture de ce passage.

volume. Ces notes donnent aussi des indications sur des résultats plus récents. Elles sont indiquées dans le texte par un chiffre de renvoi placé dans la marge.

Jean-Pierre Serre, Paris, décembre 2000

Ce volume n'aurait pas vu le jour sans l'aide d'un grand nombre de personnes. Jean Malgoire a, au nom de Grothendieck, autorisé la publication de cette correspondance. Une (petite) armée s'est chargée de saisir les lettres en TeX ce qui, pour certaines, ne fut pas une mince affaire. Une fois la saisie terminée, des relecteurs ont isolé un certain nombre de points méritant des commentaires, ce qui a contribué à étoffer les notes rédigées par Serre.

Quand le volume s'est retrouvé sous une forme raisonnablement avancée, il a fallu penser à sa publication. Aucune des séries déjà existantes de la S.M.F. ne pouvant accueillir un volume de ce type, il a été décidé de créer une nouvelle série « Documents Mathématiques » ayant pour vocation la publication de textes historico-mathématiques.

Je voudrais remercier tous les acteurs mentionnés ci-dessus de l'enthousiasme avec lequel ils ont participé à cette entreprise, et j'espère que le lecteur aura autant de plaisir à consulter cette correspondance que j'en ai eu à participer à son édition.

Pierre Colmez, Paris, janvier 2001

Lawrence 28.1.1955

Cher Serge,

Une histoire bien emmerdante m'arrive : comme je ne pouvais emporter tous mes papiers par avion, j'ai envoyé une partie dans deux colis, expédiés ensemble le jour de mon départ. Mais un seul est arrivé, il y a une semaine, et il est improbable maintenant que le deuxième arrive aussi. Il contenait ^(entre autres) les exposés des séminaires Schwartz, Cartan, Cartier, ton papier sur les faisceaux algébriques, et les papiers de Kodaira - Spencer. J'en suis navré, car sans doute les deux derniers ~~ne~~ ne peuvent se remplacer avant un temps X ; et je n'avais pas eu le temps de jeter même un coup d'œil sur Kodaira - Spencer. En tous cas, envoie-moi, s'il en reste, le jeu complet de tous les exposés des trois séminaires. J'espère que Barros pense à t'apporter ceux de Schwartz. Peux-tu dire aussi à Spencer que je n'ai reçu aucun des papiers qu'il avait voulu me faire envoyer de Princeton ?

J'ai ici pratiquement tout mon temps à moi, - je fais quelques exposés sur la thèse de Malgrange, mais ça ne me prend guère de temps. Bientôt probablement je t'embêterai avec des questions techniques diverses ; j'ai commencé à lire les "variétés" de Thom, c'est horrible comme rédaction mais sans doute utile à piocher, et ton article sur les $H(\pi, q, Z_2)$, que je trouve plaisant jusqu'à

CORRESPONDANCE

Lawrence 28.1.1955 1

Cher Serre,

Une histoire bien emmerdante m'arrive : comme je ne pouvais emporter tous mes papiers par avion, j'ai envoyé une partie dans deux colis, expédiés ensemble le jour de mon départ. Mais un seul est arrivé, il y a une semaine, et il est improbable maintenant que le deuxième arrive aussi. Il contenait (entre autres) les exposés alors existants des séminaires Schwartz, Cartan, Cartier, ton papier sur les faisceaux algébriques, et les papiers de Kodaira-Spencer. J'en suis navré, car sans doute les deux derniers ne peuvent se remplacer avant un temps X ; et je n'avais pas eu le temps de jeter même un coup d'œil sur Kodaira-Spencer. En tout cas, envoie-moi, s'il en reste, le jeu complet de tous les exposés des trois séminaires. J'espère que Barros pense à t'apporter ceux de Schwartz. Peux-tu dire aussi à Spencer que je n'ai reçu aucun des papiers qu'il avait voulu me faire envoyer de Princeton ?

J'ai ici pratiquement tout mon temps à moi, je fais quelques exposés sur la thèse de Malgrange, mais ça ne me prend guère de temps. Bientôt probablement je t'embêterai avec des questions techniques diverses ; j'ai commencé à

2 lire les « variétés » de Thom, c'est horrible comme rédaction mais sans doute
 3 utile à piocher, et ton article sur les $H(\Pi; q, Z_2)$, que je trouve plaisant jus-
 qu'à maintenant. J'ai fait aussi une révision systématique des grands trucs
 élémentaires de ho- et coho- mologie, c'était utile pour moi. Je suis tombé sur
 quelques questions d'un type standard, et dont peut-être tu as une réponse.
 Soit X espace avec « famille Φ », $X' \subset X$ partie fermée, $U = \mathbb{C}X'$, F un faisceau
 sur X . Si B est une partie de X , soit $\Phi \cap B$ l'ensemble des $A \in \Phi$ et Φ_B
 l'ensemble des $A \in \Phi$ qui sont dans B . \mathcal{O} désigne un voisinage ouvert
 arbitraire de X' . On a des homomorphismes canoniques (où pour fixer les idées
 on se place en théorie singulière) :

$$\begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 H_{\Phi}^p(X \bmod X', F) \leftarrow H_{\Phi_U}^p(U, F) \quad \text{bijetif si } X \text{ et } X' \text{ sont HLC par exemple} \\
 H_p^{\Phi}(X \bmod X', F) \rightarrow H_p^{\Phi \cap U}(U, F) \quad \text{bijetif quand?}
 \end{array} \right. \\
 4 \left\{ \begin{array}{l}
 H_p^{\Phi}(X \bmod U, F) \rightarrow \varinjlim_{\mathcal{O}} H_p^{\Phi \cap \mathcal{O}}(\mathcal{O}, F) \quad \text{bijetif si } X' \text{ admet un voisinage normal} \\
 H_p^{\Phi}(X \bmod U, F) \leftarrow \varprojlim_{\mathcal{O}} H_{\Phi_{\mathcal{O}}}^p(\mathcal{O}, F) \quad \text{bijetif quand?} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 H_{\Phi \cap X'}^p(X', F) \leftarrow \varinjlim_{\mathcal{O}} H_{\Phi \cap \mathcal{O}}^p(\mathcal{O}, F) \quad \text{toujours bijetif} \\
 H_p^{\Phi \cap X'}(X', F) \rightarrow \varprojlim_{\mathcal{O}} H_p^{\Phi \cap \mathcal{O}}(\mathcal{O}, F) \quad \text{bijetif quand?}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Les accolades réunissent des homomorphismes de type dual. \varinjlim = limite inductive, \varprojlim = limite projective, la signification dans chaque cas est d'ailleurs claire. Les 2 premiers couples d'homomorphismes se présentent quand on veut éliminer les « groupes relatifs » en les interprétant en termes de « groupes absolus ». Aux questions marquées (?), je n'arrive à donner que des réponses peu satisfaisantes en procédant par dualité : je suis obligé de supposer F au moins localement constant, et Φ la famille de tous les fermés (co), resp. de tous les compacts (ho). Une conjecture raisonnable serait que tout marche si X et X' sont HLC. Question analogue : l'homomorphisme

$$H^p(X, F) \rightarrow \varprojlim_K H^p(K, F)$$

où K parcourt les compacts de X supposé localement compact et paracompact, est-il bijetif, ou du moins dans quels cas ? Ici encore, réponse partielle par dualité si F est localement constant, mais ce n'est guère satisfaisant. La question se pose par exemple pour justifier le « passage à la limite » dans les théorèmes A et B de Cartan, à partir du cas compact.

A titre d'exercice, j'ai réfléchi à ta question pour une formule de Künneth pour la cohomologie à valeurs dans des faisceaux algébriques cohérents sur des variétés projectives. J'ai démontré avec soin qu'il suffit de prouver que si A est *localement libre* sur X^r et *acyclique*, B *localement libre* sur X^s et *acyclique* (X^r et X^s espaces projectifs) alors $A \widehat{\otimes} B$ (le « bon » produit tensoriel, obtenu à partir de $A \otimes B$ par extension des scalaires de $\mathcal{O}_{X^r} \otimes \mathcal{O}_{X^s}$ à $\mathcal{O}_{X^r \times X^s}$) est acyclique. Ou même seulement que $A(n) \widehat{\otimes} B$ l'est pour n assez grand. Cela t'avance-t-il ? Je ne suis pas arrivé plus loin.

Tu m'avais dit que Bourbaki voulait m'envoyer une rédaction Samuel de géométrie algébrique (et d'algèbre commutative ?). J'en serai bien aise, ainsi que de n'importe quelle rédaction, tirages à part intéressants etc. Mon adresse :
Dep. of Math., University of Kansas, Lawrence (Kansas) USA

Merci d'avance pour tes services, salut et fraternité

A. Grothendieck

29 Janvier. Ce colis à la noix vient d'arriver quand même, sans crier gare ! Tout est bien qui finit bien. Je te rappelle que j'ai exactement 5 exposés de chacun des séminaires.

Lawrence 18.2.1955

Cher Serre,

Je t'écris pour quelques questions et remarques.

Dans ton article sur la cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac-Lane, § 1.2, propriété 2.2 des carrés de Steenrod, il faut faire la remarque que Sq^i permute à ∂ pourvu qu'on opère uniquement sur des classes de cohomologie de degré $q \geq i$, sinon c'est manifestement faux. Pour cette raison, un carré itéré Sq^I ne permute au bord que si on fait des restrictions sur le degré des classes sur lesquelles on opère, ($i_r \leq q, i_{r-1} \leq i_r + q, \dots, i_1 \leq i_2 + \dots + i_r + q$), et