

quatrième série - tome 43 fascicule 1 janvier-février 2010

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Carlos Gustavo MOREIRA & Jean-Christophe YOCCOZ

*Tangences homoclines stables pour des ensembles hyperboliques
de grande dimension fractale*

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

TANGENCES HOMOCLINES STABLES POUR DES ENSEMBLES HYPERBOLIQUES DE GRANDE DIMENSION FRACTALE

PAR CARLOS GUSTAVO MOREIRA* ET JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

RÉSUMÉ. – Soit F_0 un difféomorphisme d'une surface possédant deux fers à cheval Λ, Λ' tels que $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ aient en un point q une tangence quadratique isolée. Nous montrons que, si la somme des dimensions transverses de $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ est strictement plus grande que 1, les difféomorphismes voisins de F_0 tels que $W^s\Lambda$ et $W^u\Lambda'$ soient stablement tangents au voisinage de q forment une partie de densité inférieure strictement positive en F_0 .

ABSTRACT. – Let F_0 be a surface diffeomorphism with two horseshoes Λ, Λ' such that $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ have a quadratic tangency at a point q . We show that, if the sum of the transverse dimension of $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ is larger than one, the set of diffeomorphisms close to F_0 such that $W^s\Lambda$ and $W^u\Lambda'$ have a stable tangency near q has positive density at F_0 .

Introduction

Un ensemble de Cantor régulier est un ensemble de Cantor qui est maximal invariant pour une application dilatante unidimensionnelle. La géométrie transverse du feuilletage stable d'un fer à cheval pour un difféomorphisme d'une surface est ainsi décrite par un ensemble de Cantor régulier.

Dans un article précédent [6], nous avons montré que, si K, K' sont des ensembles de Cantor réguliers, définis respectivement par des applications expansives g, g' , dont l'intersection est non vide et la somme des dimensions est > 1 , alors on peut perturber de façon arbitrairement faible g, g' en des applications \tilde{g}, \tilde{g}' de façon que les ensembles de Cantor réguliers associés \tilde{K}, \tilde{K}' s'intersectent stablement : pour tous $\tilde{g}_1, \tilde{g}'_1$ assez proches de \tilde{g}, \tilde{g}' , les ensembles de Cantor réguliers associés $\tilde{K}_1, \tilde{K}'_1$ ont une intersection non vide.

Le but de cet article est de démontrer un résultat analogue dans le contexte des bifurcations homoclines ou hétéroclines pour les difféomorphismes d'une surface, tant dans un cadre conservatif que dissipatif.

* Avec le support du CNPq.

Les bifurcations homoclines jouent un rôle fondamental dans l'étude de difféomorphismes des surfaces. De nombreux phénomènes dynamiques compliqués sont engendrés par les bifurcations homoclines. C'est le cas par exemple du phénomène de Newhouse, la coexistence générique d'une infinité de puits parmi certains ouverts de difféomorphismes.

Par ailleurs, les bifurcations homoclines sont fréquentes parmi les difféomorphismes non-hyperboliques des surfaces. Il y a une conjecture de J. Palis selon laquelle tout difféomorphisme d'une surface peut être approché par un difféomorphisme hyperbolique ou par un difféomorphisme présentant une tangence homocline. Cette conjecture a été démontrée en topologie C^1 par E. Pujals et M. Sambarino [11].

Plus précisément, soient M une surface de classe C^∞ et F_0 un difféomorphisme de classe C^∞ de M . Rappelons qu'on appelle fer à cheval de F_0 une partie compacte non vide invariante Λ de M qui est aussi hyperbolique, transitive, localement maximale, de type selle, et non réduite à une orbite périodique. De type selle signifie ici que les ensembles stable et instable de Λ sont d'intérieur vide; ceci implique que Λ est totalement discontinu. Considérons deux fers à cheval Λ, Λ' de F_0 . On n'exclut pas qu'on puisse avoir $\Lambda \cap \Lambda' \neq \emptyset$, ou même $\Lambda = \Lambda'$.

On suppose qu'il existe des points périodiques $p \in \Lambda, p' \in \Lambda'$ tels que les courbes $W^s(p)$ et $W^u(p')$ aient en un point q une tangence quadratique. On suppose de plus que q est un point d'intersection isolé de $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$.

La figure ci-dessous montre une tangence homocline isolée d'un fer à cheval (dans le cas $\Lambda = \Lambda', p = p'$).

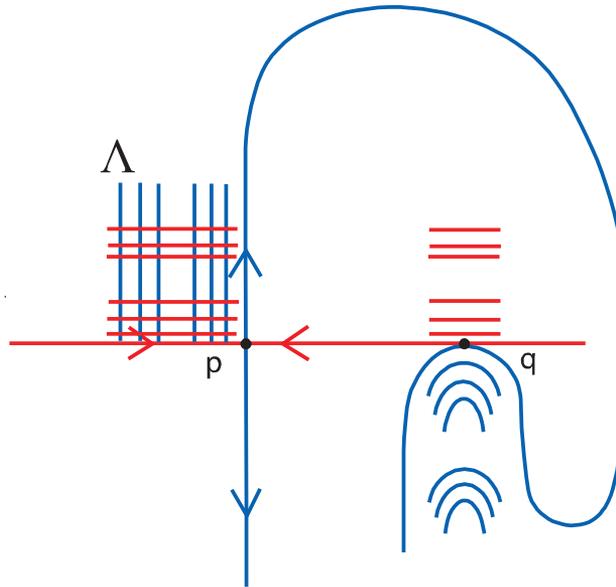


FIG. 1

Dans un voisinage suffisamment petit \mathcal{U} de F_0 dans $\text{Diff}^\infty(M)$, les fers à cheval Λ, Λ' et donc aussi les points périodiques p, p' , ont une continuation hyperbolique. La condition de tangence quadratique entre $W^s(p)$ et $W^u(p')$ près de q définit une hypersurface \mathcal{U}_0 de \mathcal{U} , qui

sépare \mathcal{U} en deux parties \mathcal{U}_- , \mathcal{U}_+ : dans \mathcal{U}_- , $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ne se rencontrent pas près de q , tandis que, dans \mathcal{U}_+ , $W^s(p)$ et $W^u(p')$ ont deux intersections transverses au voisinage de q .

Choisissons des variétés locales $W_{loc}^u(p)$, $W_{loc}^s(p')$ et notons d (resp. d') la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W_{loc}^u(p)$ (resp. $\Lambda' \cap W_{loc}^s(p')$), c'est-à-dire la dimension transverse de $W^s(\Lambda)$ (resp. $W^u(\Lambda')$). Ces dimensions transverses sont bien définies : d (resp. d') est égal à la dimension de Hausdorff de $\Lambda \cap W_{loc}^u(x)$ (resp. $\Lambda' \cap W_{loc}^s(x')$), pour chaque $x \in \Lambda$ (resp. $x' \in \Lambda'$), les applications d'holonomie étant de classe C^1 .

Soient $z \in W_{loc}^u(p) \cap \Lambda$, $z' \in W_{loc}^s(p') \cap \Lambda'$. Les points z, z' peuvent être suivis hyperboliquement dans \mathcal{U} . La condition que $W^s(z), W^u(z')$ présentent au voisinage de q une tangence quadratique définit une hypersurface $\mathcal{T}(z, z')$ contenue dans $\overline{\mathcal{U}}_+$ et même dans \mathcal{U}_+ sauf si $(z, z') = (p, p')$ car on a alors $\mathcal{T}(p, p') = \mathcal{U}_0$ (strictement parlant, il ne faut pas considérer $W^s(z), W^u(z')$ mais $F^{-N}(W_{loc}^s(F^N z)), F^N(W_{loc}^u(F^{-N} z'))$, avec N assez grand). On posera

$$\mathcal{T} = \bigcup_{z, z'} \mathcal{T}(z, z') \subset \mathcal{U}_+ \cup \mathcal{U}_0.$$

On prendra garde que les hypersurfaces $\mathcal{T}(z, z')$ (lorsque z, z' varient) ne sont en général pas disjointes. Pour comprendre le lieu de tangence \mathcal{T} , il est raisonnable d'étudier comment des familles à un paramètre $(F_t)_{|t| \leq t_0}$ transverses à \mathcal{U}_0 le rencontrent. On supposera bien sûr qu'on a $F_t \in \mathcal{U}_+$ pour $t > 0$ et $F_t \in \mathcal{U}_-$ pour $t < 0$. On appelle *densité inférieure* (resp. *supérieure*) du lieu de tangence dans une telle famille le nombre

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \mathcal{T}\}) \text{ (resp. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \mathcal{T}\})).$$

On appellera de même *densité inférieure* (resp. *supérieure*) du lieu de tangence *stable* le nombre

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \text{int} \mathcal{T}\}) \text{ (resp. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} \text{Leb}(\{t \in [0, \varepsilon], F_t \in \text{int} \mathcal{T}\})).$$

La figure ci-dessous représente l'espace des paramètres \mathcal{U} et les hypersurfaces $\mathcal{T}(z, z')$.

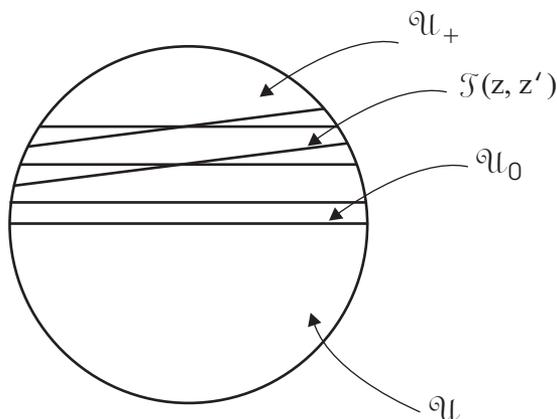


FIG. 2

Supposons d'abord qu'on a $d + d' < 1$. Il résulte alors des travaux de Palis et Takens [8] que, étant donné $d + d' < D < 1$, si \mathcal{U} est suffisamment petit, toute famille transverse à \mathcal{U}_0 rencontre \mathcal{T} suivant un ensemble de dimension de Hausdorff $\leq D$.

À l'extrême inverse, Hall [1] dans un cadre arithmétique et Newhouse [7] dans un cadre dynamique ont introduit indépendamment des conditions (basées sur la notion d'épaisseur) qui garantissent qu'on ait $\mathcal{T} = \overline{\mathcal{U}}_+$ (si \mathcal{U} est suffisamment petit). Par ailleurs, Palis et le second auteur ont montré que, pour $d + d' > 1$, la densité supérieure du lieu de tangence est strictement positive pour presque toute famille (voir [10] pour l'énoncé précis).

Notre résultat principal renforce ce théorème :

THÉORÈME A. – *Supposons $d + d' > 1$. Si \mathcal{U} est assez petit, il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}_0^* de \mathcal{U}_0 telle que toute famille transverse à \mathcal{U}_0 en un point de \mathcal{U}_0^* rencontre $\text{int } \mathcal{T}$ suivant une partie de densité inférieure strictement positive. De plus, une telle famille rencontre $(\text{int } \mathcal{T}) \cup (\mathcal{U} - \mathcal{T})$ suivant une partie de densité totale.*

On démontrera dans la suite ce résultat aussi bien dans le cadre dissipatif que conservatif : dans ce dernier cas, on suppose que F_0 préserve une forme d'aire ω , on note $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$ le groupe des difféomorphismes de classe C^∞ qui préservent ω , et on prend pour \mathcal{U} un voisinage de F_0 dans $\text{Diff}_\omega^\infty(M)$.

Le plan général de la démonstration du théorème A, ainsi que plusieurs concepts fondamentaux, sont identiques à ceux intervenant dans la démonstration du résultat principal de [6]. Il y a cependant plusieurs difficultés spécifiques au cas présent, qui nécessitent de reprendre la démonstration dans son ensemble ; l'origine de ces difficultés est pour une grande partie liée au fait suivant : on veut perturber le difféomorphisme initial dans la C^∞ topologie, alors qu'en général les applications expansives qui définissent les géométries transverses de $W^s(\Lambda)$ et $W^u(\Lambda')$ ne sont pas de classe C^2 .

On commence par rappeler un certain nombre de concepts fondamentaux, en particulier celui de géométrie infinitésimale. Ceci nous permet d'énoncer ce qui constitue en fait l'énoncé central, le théorème B ci-dessous. On montre ensuite comment le théorème A se déduit du théorème B. Le reste de l'article est alors consacré à la démonstration du théorème B, qu'on présentera dans ses grandes lignes avant d'en donner les détails.

Dans le cadre de premières bifurcations, on peut utiliser le théorème A pour renforcer les résultats de [8] et [5] sur la dynamique après la bifurcation. On note $\Omega(F)$ l'ensemble non-errant d'un difféomorphisme F .

Nous disons que $F \in \text{Diff}^\infty(M)$ est stablement hyperbolique s'il existe un voisinage $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^\infty(M)$ de F tel que $\Omega(G)$ soit hyperbolique pour tout $G \in \mathcal{U}$.

On suppose maintenant que $\Lambda = \Lambda'$, $p = p'$ et $\Omega(F_0) = \tilde{\Lambda} \cup \mathcal{O}(q)$, où $\tilde{\Lambda}$ est un ensemble hyperbolique dont $\Lambda \subset \tilde{\Lambda}$ est une partie ouverte et fermée ; on suppose aussi qu'on peut choisir le voisinage \mathcal{U} de F_0 de telle façon que $\Omega(F)$ soit hyperbolique pour chaque $F \in \mathcal{U}^-$. Alors on démontrera la variante suivante du théorème A :

THÉORÈME \tilde{A} . – *Supposons $d + d' > 1$. Il existe une partie ouverte et dense \mathcal{U}_0^* de \mathcal{U}_0 telle que toute famille transverse \mathcal{U}_0 en un point de \mathcal{U}_0^* rencontre $(\text{int } \mathcal{T}) \cup \mathcal{H}$ suivant une partie de densité totale, où $\mathcal{H} = \{F \in \mathcal{U}, F \text{ est stablement hyperbolique}\}$.*