

*quatrième série - tome 43      fascicule 2      mars-avril 2010*

*ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
de  
L'ÉCOLE  
NORMALE  
SUPÉRIEURE*

Jérémy BLANC

*Groupes de Cremona, connexité et simplicité*

---

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# GROUPES DE CREMONA, CONNEXITÉ ET SIMPLICITÉ

PAR JÉRÉMY BLANC

---

**RÉSUMÉ.** – Le groupe de Cremona est connexe en toute dimension et, muni de sa topologie, il est simple en dimension 2.

**ABSTRACT.** – The Cremona group is connected in any dimension and, endowed with its topology, it is simple in dimension 2.

## 1. Questions et résultats

Soit  $k$  un corps algébriquement clos. On note  $\text{Cr}_n(k)$  le groupe de Cremona de dimension  $n$ , groupe des transformations birationnelles de  $\mathbb{P}_k^n$ , anti-isomorphe via l'action sur le corps des fractions rationnelles à  $\text{Aut}_k(k(x_1, \dots, x_n))$ . Ce groupe est muni d'une topologie naturelle (décrite à la section 2).

En 1974, dans un rapport sur les questions ouvertes importantes en géométrie algébrique [5], D. Mumford consacre un paragraphe au groupe  $\text{Cr}_2(k)$ . Il parle de mettre une topologie sur le groupe, et pose alors la question : ce groupe est-il simple ? Le théorème 4.2 démontré plus bas permet de répondre par l'affirmative.

La technique utilisée pour cela est élémentaire. Elle permet également de prouver que le groupe  $\text{Cr}_n(k)$  est connexe pour tout  $n$  (Théorème 5.1). Ceci répond à une question posée par J.-P. Serre lors du 1000<sup>e</sup> exposé Bourbaki [8], concernant la dimension  $n \geq 3$ , le cas  $n \leq 2$  étant déjà bien connu.

Cet article est articulé ainsi : la section 2 donne des rappels sur la topologie de Zariski de  $\text{Cr}_n(k)$ , la section 3 présente un lemme de déformation, qui permet de montrer la simplicité de  $\text{Cr}_2(k)$  (section 4) et la connexité de  $\text{Cr}_n(k)$  (section 5).

Je tiens à remercier J.-P. Furter pour des discussions intéressantes sur cet article, et tout spécialement J.-P. Serre pour ses relectures attentives de cet article et ses précieuses corrections.

## 2. La topologie de Zariski de $\text{Cr}_n(k)$

Soit  $X$  une  $k$ -variété ( $k$  est toujours le corps algébriquement clos fixé au départ). On note  $\text{Bir}(X)$  l'ensemble des applications birationnelles  $X \dashrightarrow X$ , et  $\text{Aut}(X) \subset \text{Bir}(X)$  le groupe des automorphismes de  $X$ .

Afin de décrire la topologie de  $\text{Bir}(X)$ , décrivons tout d'abord les morphismes  $A \rightarrow \text{Bir}(X)$  :

**DÉFINITION 2.1.** – Une *famille algébrique* d'éléments de  $\text{Bir}(X)$  est la donnée d'une application rationnelle  $f : A \times X \dashrightarrow X$  où  $A$  est une  $k$ -variété, définie sur un ouvert dense  $U$  tel que, pour tout  $a \in A$ ,  $U_a := U \cap (\{a\} \times X)$  soit un ouvert dense de  $\{a\} \times X$  et que la restriction de  $\text{id} \times f$  à  $U$  soit un isomorphisme de  $U$  sur un ouvert dense de  $A \times X$ .

Pour tout  $a \in A$ , l'application birationnelle  $x \dashrightarrow f(a, x)$  représente alors un élément  $f_a \in \text{Bir}(X)$ . La famille  $f_a$  ( $a \in A$ ) représente une application  $A \rightarrow \text{Bir}(X)$ , que l'on appellera *morphisme* de  $A$  vers  $\text{Bir}(X)$ .

Cette définition correspond à celle de [8] et [2, §1] ; un morphisme  $A \rightarrow \text{Bir}(X)$  correspond alors à un pseudo-automorphisme du  $A$ -schéma  $A \times X$ . On définit la topologie de Zariski sur  $\text{Bir}(X)$  de la manière suivante (voir [8, §1.6]) :

**DÉFINITION 2.2.** – On dit qu'un ensemble  $R \subset \text{Bir}(X)$  est *fermé* si, pour toute  $k$ -variété  $A$  et tout morphisme  $A \rightarrow \text{Bir}(X)$ , la préimage de  $R$  dans  $A$  est fermée.

Comme l'explique [8], ceci donne une topologie sur  $\text{Bir}(X)$ , qui est la topologie la plus fine qui rende les morphismes vers  $\text{Bir}(X)$  continus. De plus, en définissant de manière analogue la topologie de Zariski sur  $\text{Bir}(X) \times \text{Bir}(X)$ , la composition donne une application continue  $\text{Bir}(X) \times \text{Bir}(X) \rightarrow \text{Bir}(X)$ .

En particulier, on peut restreindre ceci à  $\text{Aut}(X)$  et mettre ainsi une topologie sur ce groupe. Lorsque  $X = \mathbb{P}_k^n$ , on peut démontrer que l'on retrouve la topologie de Zariski habituelle du groupe algébrique  $\text{Aut}(X) = \text{PGL}(n+1, k)$  et qu'en fait  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Cr}_n(X)$  est une immersion fermée [7].

Les groupes qui nous intéressent le plus sont ceux où la  $k$ -variété  $X$  est rationnelle. On rappelle que si  $X$  est rationnelle, de dimension  $n$ , alors  $\text{Bir}(X)$  s'identifie naturellement à  $\text{Cr}_n(k) = \text{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$  via une application birationnelle choisie  $X \dashrightarrow \mathbb{P}_k^n$  ; le choix de celle-ci fait juste varier l'homéomorphisme  $\text{Bir}(X) \rightarrow \text{Cr}_n(k)$ . Dans la suite, on prendra le plus souvent  $X = \mathbb{A}_k^n$  ou  $X = \mathbb{P}_k^n$ , suivant les besoins.

## 3. Préliminaires techniques

### 3.1. Le groupe de de Jonquières

Pour  $n \geq 2$ , notons  $\phi$  la projection

$$(x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (x_1 : \cdots : x_n)$$

de  $\mathbb{P}_k^n$  dans  $\mathbb{P}_k^{n-1}$ . On appelle *groupe de de Jonquières*  $J_n$  le sous-groupe de  $\text{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$  qui préserve l'ensemble des fibres de  $\phi$ . On note  $J_n^0$  le sous-groupe de  $J_n$  constitué des éléments qui préservent une fibre générale de  $\phi$ .

De manière affine, on peut restreindre  $\phi$  à la projection  $k^n \rightarrow k^{n-1}$ , et ainsi voir que  $J_n$  est naturellement isomorphe à  $J_n^0 \rtimes \text{Bir}(k^{n-1})$ , où

$$J_n^0 \simeq \text{Aut}(\mathbb{P}_K^1) \simeq \text{PGL}(2, K), \text{ avec } K = k(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

L'homomorphisme déterminant  $\text{GL}(2, K) \rightarrow K^*$  induit un homomorphisme surjectif

$$\det: \text{PGL}(2, K) \rightarrow K^*/(K^*)^2,$$

où  $(K^*)^2$  désigne l'ensemble des carrés de  $K^*$ . On notera  $J_n^1 \subset J_n^0$  le sous-groupe normal correspondant au noyau de  $\det$ . Alors, l'homomorphisme précédent nous donne

$$J_n^1 \simeq \text{PSL}(2, K).$$

Le groupe  $J_n^1$  est simple [3, Chapitre II, §2]. De plus, comme tout élément  $f \in J_n^0$  satisfait  $\det(f^2) = 1$ , le quotient  $J_n^0/J_n^1$  est un groupe abélien de type  $(2, \dots, 2, \dots)$ . Les classes de  $J_n^0 \pmod{J_n^1}$  sont représentées par les involutions de de Jonquières  $f_h: (x_1, \dots, x_n) \dashrightarrow (x_1, \dots, x_{n-1}, h/x_n)$ , où  $h \in k(x_1, \dots, x_{n-1})^* = K^*$ . Puisque  $\det(f_h) = -h$ , deux involutions  $f_h$  et  $f_{h'}$  représentent la même classe si et seulement si  $h/h'$  est un carré dans  $K^*$ .

### 3.2. Dérivée normale

Dans cette section, on se donne la situation suivante :

Partons d'une  $k$ -variété lisse  $X$ . Soit  $Y$  la droite affine sur  $k$  et soit  $Z = X \times Y$  ; le morphisme  $x \mapsto (x, 0)$  identifie  $X$  à une sous-variété de  $Z$ . Soit  $U$  un ouvert dense de  $Z$  tel que  $U_X := U \cap X$  soit dense dans  $X$  et soit  $f: U \rightarrow Z$  un morphisme qui envoie  $U_X$  dans  $X$  ; notons  $f_X: U \rightarrow X$  et  $f_Y: U \rightarrow Y$  les deux composantes de  $f$ .

À partir de cette donnée, on va définir la dérivée normale de  $f$ , qui est une application rationnelle  $f_0: Z \dashrightarrow Z$ , et montrer qu'il s'agit d'une limite de conjugués de  $f$ .

La fonction  $f_Y$  a la propriété que  $f_Y(x, y) = 0$  si  $y = 0$  ; on en déduit que  $f_Y$  est divisible par la fonction «  $y$  », ce qui veut dire que  $f_Y(x, y) = y \cdot g_Y(x, y)$  pour une certaine fonction  $g_Y$  sur  $U$ . Ceci nous permet de définir la *dérivée normale de  $f$  le long de  $X$* , qui est le morphisme

$$f_0: U_X \times Y \rightarrow Z,$$

donné par la formule  $f_0(x, y) = (f_X(x, 0), y \cdot g_Y(x, 0))$ .

On remarque que  $f_0$  ne dépend que du comportement de  $f$  dans un voisinage infinitésimal de  $X$  et est une sorte de linéarisation de  $f$  ; en fait  $f_0$  ne dépend pas du choix de l'ouvert  $U$  mais seulement de  $f$  vue comme application rationnelle de  $Z$  dans lui-même. De plus  $(x, 0) \mapsto f_X(x, 0)$  est la restriction de  $f$  à  $X$ , ce qui implique que  $f_0$  est compatible avec la projection  $Z \rightarrow X$  ; on a les diagrammes commutatifs

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} U_X \times Y & \xrightarrow{f_0} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_X & \xrightarrow{f|_{U_X}} & X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f_0} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f|_X} & X. \end{array}$$

De plus,  $f_0$  est une homothétie sur chaque fibre.

Montrons maintenant que  $f_0$  est une limite de conjugués de  $f$ . Soit  $T$  un autre exemplaire de la droite affine sur  $k$  ; pour tout  $t \in T$ , soit  $U_t$  l'ouvert de  $Z$  formé des  $(x, y)$  tels que  $(x, ty)$

appartienne à  $U$ . Remarquons que  $U_0 = U_X \times Y$ . La réunion  $U_T$  des  $\{t\} \times U_t$  est un ouvert de  $T \times Z$  contenant  $T \times U_X$ . Si  $t \neq 0$ , soit  $s_t$  l'automorphisme  $(x, y) \mapsto (x, ty)$  de  $Z$  et posons  $f_t = s_t^{-1} \circ f \circ s_t$ , ce qui a un sens sur  $U_t$ ; si  $t = 0$ , définissons  $f_t = f_0$  comme ci-dessus; c'est un morphisme défini sur  $U_0 = U_X \times Y$ .

LEMME 3.1. – *Avec les notations précédentes, la famille des  $f_t$  ( $t \in T$ ) définit un morphisme  $F: U_T \rightarrow Z$ .*

*Démonstration.* – On a  $F(t, x, y) = (f_X(x, ty), y \cdot g_Y(x, ty))$ : lorsque  $t \neq 0$ , cela résulte de  $t^{-1} f_Y(x, ty) = y \cdot g_Y(x, ty)$  et lorsque  $t = 0$ , c'est la définition de  $f_0$ . Le lemme suit alors du fait que  $(t, x, y) \mapsto f_X(x, ty)$  et  $(t, x, y) \mapsto g_Y(x, ty)$  sont des morphismes définis sur  $U_T$ .  $\square$

LEMME 3.2. – *Avec les mêmes notations qu'avant, supposons de plus que  $X$  est irréductible, que  $f$  est un isomorphisme de  $U$  sur un ouvert  $V$  de  $Z$  et que  $f$  se restreint à un isomorphisme de  $U_X = U \cap X$  vers  $V_X = V \cap X$  (ce qui implique que  $f \in \text{Bir}(Z)$  et  $f|_X \in \text{Bir}(X)$ ).*

*Alors, la famille  $f_t$  ( $t \in T$ ) définit un morphisme  $T \rightarrow \text{Bir}(Z)$  (au sens de la définition 2.1).*

*Démonstration.* – Le lemme 3.1 montre que  $F: U_T \rightarrow Z$  est un morphisme, qui induit donc une application rationnelle  $T \times Z \dashrightarrow Z$ . Pour tout  $t \in T$ ,  $U_T \cap (\{t\} \times Z)$  n'est rien d'autre que  $\{t\} \times U_t$ , ouvert dense de  $\{t\} \times Z$  par construction, et la restriction de  $F$  à cet ouvert correspond à  $f_t$ .

Notons  $r: V \rightarrow U$  l'inverse de  $f$ , qui applique  $V_X = V \cap X$  dans  $X$  par construction, et utilisons la construction précédente pour  $r = (r_X, r_Y)$ . On a  $V_t = \{(x, y) \in Z \mid (x, ty) \in V\}$  et le lemme 3.1 nous donne un morphisme  $R: V_T \rightarrow Z$ , dont la restriction à  $\{t\} \times V_t$  correspond à  $r_t$ .

Il suffit alors de voir que  $\text{id} \times f$  est un isomorphisme de  $U_T$  vers  $V_T$ , dont l'inverse est  $\text{id} \times r$ , ce qui peut par exemple se déduire de la forme explicite de  $F(t, x, y)$  et  $R(t, x, y)$  donnée dans la preuve du lemme 3.1.  $\square$

### 3.3. Le lemme de déformation appliqué au groupe de Cremona

Rappelons que si  $Z$  est une  $k$ -variété irréductible lisse, si  $f \in \text{Bir}(Z)$  et  $H, H' \subset Z$  sont deux hypersurfaces irréductibles, on dit que  $f$  se restreint à une application birationnelle  $f|_H: H \dashrightarrow H'$  si  $f$  est définie sur un ouvert  $U$  tel que  $U \cap H$  soit un ouvert dense de  $H$  et tel que  $f|_{U \cap H}: U \cap H \rightarrow H'$  soit une immersion ouverte. On peut également présenter cette notion de la façon suivante: les hypersurfaces  $H$  et  $H'$  définissent des valuations discrètes  $v$  et  $v'$  du corps des fonctions de  $Z$ , et l'on demande que  $f$  transforme  $v$  en  $v'$ .

En appliquant les résultats de la section 3.2 au cas d'une transformation birationnelle de  $\mathbb{P}_k^n$ , nous allons démontrer le résultat suivant.

LEMME 3.3. – *Pour  $n \geq 2$ , notons  $H_0 \subset \mathbb{P}_k^n$  l'hyperplan d'équation  $x_0 = 0$ . Soit  $f \in \text{Bir}(\mathbb{P}_k^n)$  un élément qui se restreint à une application birationnelle  $f|_{H_0}: H_0 \dashrightarrow H_0$ .*

*Notons  $Z \subset \mathbb{P}_k^n$  le complémentaire de l'hyperplan d'équation  $x_n = 0$  et  $X = Z \cap H_0$ , de telle sorte que  $Z = X \times Y$  avec  $Y \cong \mathbb{A}_k^1$ .*