ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 48 fascicule 1 janvier-février 2015

ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE

Daniel CARO

Sur la préservation de la surconvergence par l'image directe d'un morphisme propre et lisse

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

Antoine Chambert-Loir

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. Sainte-Claire Deville
de 1883 à 1888 par H. Debray
de 1889 à 1900 par C. Hermite
de 1901 à 1917 par G. Darboux
de 1918 à 1941 par É. Picard
de 1942 à 1967 par P. Montel

Comité de rédaction au 1er janvier 2015

N. Anantharaman, B. Kleiner
E. Breuillard, E. Kowalski
R. Cerf, P. Le Calvez
A. Chambert-Loir, M. Mustaţă
I. Gallagher, L. Saloff-Coste

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
`annales@ens.fr`

Édition / *Publication*

Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99
Fax : (33) 01 40 46 90 96

Abonnements / *Subscriptions*

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : `smf@smf.univ-mrs.fr`

Tarifs

Europe : 515 €. Hors Europe : 545 €. Vente au numéro : 77 €.

© 2015 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1er juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

ISSN 0012-9593

Directeur de la publication : Marc Peigné
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4e série, t. 48, 2015, p. 131 à 169

SUR LA PRÉSERVATION DE LA SURCONVERGENCE PAR L'IMAGE DIRECTE D'UN MORPHISME PROPRE ET LISSE

PAR DANIEL CARO

RÉSUMÉ. – Modulo sa traduction en théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques, nous prouvons la conjecture de Berthelot sur la préservation de la surconvergence par l'image directe d'un morphisme propre et lisse de variétés sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$.

ABSTRACT. – Up to a translation in the language of arithmetic $\mathcal{D}$-modules, we prove a conjecture of Berthelot on the preservation of the overconvergence under the direct image by a smooth proper morphism of varieties over a perfect field of characteristic $p > 0$.

Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0. Soit $b\colon Y' \to Y$ un morphisme propre et lisse de k-variétés, i.e., de k-schémas séparés et de type fini. Berthelot conjectura en 1986 dans [2, 4.3] que l'image directe par b du F-isocristal surconvergent sur Y' *constant*, i.e. la cohomologie relative rigide $\mathbb{R}b_{\mathrm{rig}*}(Y'/K)$, a pour faisceaux de cohomologie des F-isocristaux surconvergents sur Y. Cette conjecture avait été validée par Berthelot dans le cas relevable lorsque Y est lisse (voir [2, 4, Théorème 5]). Plus précisément, il a vérifié sa conjecture lorsqu'il existe un morphisme $a\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels propres et un ouvert $\mathcal{Y}$ de $\mathfrak{X}$ tels que $a^{-1}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{Y}$ soit un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses relevant b. La preuve de ce cas repose sur le théorème de finitude de Kiehl pour les morphismes propres en géométrie analytique rigide.

Ensuite, dans [22, 4], Tsuzuki a étendu cette conjecture du cas constant au cas général de la manière suivante (en fait il la formule plus généralement en remplaçant la base $\mathcal{V}$ par un triplet comprenant un $\mathcal{V}$-schéma formel) : « soient $a\colon X' \to X$ un morphisme propre de k-variétés, Y un ouvert de X tel que le morphisme induit $b\colon Y' := a^{-1}(Y) \to Y$ soit de plus lisse. Alors, pour tout (F-)isocristal E' sur Y' surconvergent le long de $X' \setminus Y'$, les

L'auteur a bénéficié du soutien du réseau européen TMR *Arithmetic Algebraic Geometry* (contrat numéro UE MRTN-CT-2003-504917).

0012-9593/01/© 2015 Société Mathématique de France. Tous droits réservés

faisceaux de cohomologie de $\mathbb{R}a_{\mathrm{rig}*}(E'/K)$ sont des (F-)isocristaux sur Y surconvergents le long de $X \setminus Y$. » On la nommera encore conjecture de Berthelot (avec coefficients si on veut préciser). Rappelons que lorsque X est propre, $\mathbb{R}a_{\mathrm{rig}*}(E'/K)$ ne dépend canoniquement que de b et se note par conséquent $\mathbb{R}b_{\mathrm{rig}*}(E'/K)$. Via un théorème de changement de base de la cohomologie rigide relative, Tsuzuki a validé cette conjecture dans le contexte suivant : soient $f\colon \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ un morphisme propre de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés de type fini, X un sous-schéma fermé de la fibre spéciale de $\mathcal{P}$, Y un ouvert de X, $X' := f^{-1}(X)$, $Y' := f^{-1}(Y)$ tels que f soit lisse au voisinage de Y' et $\mathcal{P}$ soit lisse au voisinage de Y. Dans ce cas, pour tout (F-)isocristal E' sur Y' surconvergent le long de $X' \setminus Y'$, les faisceaux de cohomologie de $\mathbb{R}f_{\mathrm{rig}*}(E'/K)$ sont des (F-)isocristaux sur Y surconvergents le long de $X \setminus Y$ (voir les théorèmes [22, 4.1.1 et 4.1.4] de Tsuzuki).

Plus récemment, dans le cas où $\mathcal{V}$ est modérément ramifié, Étesse a validé cette conjecture de Berthelot avec coefficients dans le cas absolu (i.e. X est propre) si l'une des deux conditions est validée : b est relevable sur $\mathcal{V}$ ou Y' est une intersection complète relative dans des espaces projectifs sur Y (voir [17]).

On dispose enfin de deux autres versions (l'une est plus forte que l'autre) de Shiho de cette conjecture de Berthelot avec coefficients (voir les deux conjectures [20, 5.3 et 5.5]). Dans [21], Shiho résout sa conjecture la plus faible. Enfin, lorsque b n'est plus forcément propre et lisse, Shiho a vérifié la surcohérence générique (i.e., devient un isocristal surconvergent sur un ouvert dense) de la cohomologie rigide relative avec coefficients.

Nous nous proposons d'apporter un éclairage nouveau sur ces questions via la théorie de Berthelot des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Rappelons d'abord comment la théorie des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques est reliée à la théorie des isocristaux surconvergents. Soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit d-réalisable, i.e., tels qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ séparé et lisse, un diviseur T de la fibre spéciale de $\mathcal{P}$ et une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ vérifiant $Y = X \setminus T$. D'après [12], nous bénéficions d'une équivalence entre la catégorie (F-)$\mathrm{Isoc}^{\dagger}(Y, X/K)$ des (F-)isocristaux surconvergents sur $(Y, X)/K$ et la catégorie (F-)$\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$ des (F-)isocristaux surcohérents sur $(Y, X)/K$. Les objets de la catégorie (F-)$\mathrm{Isoc}^{\dagger\dagger}(Y, X/K)$ sont des (F-)$\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $(Y, X)/K$ vérifiant certaines hypothèses de finitude. Pour obtenir cette équivalence, nous utilisons le morphisme de spécialisation $\mathrm{sp}\colon \mathcal{P}_K \to \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}_K$ est la fibre générique au sens de Raynaud (l'espace analytique rigide canoniquement associé) de $\mathcal{P}$. Ce morphisme de spécialisation sp permet de relier le monde de la géométrie analytique rigide dans lequel vivent les isocristaux surconvergents et celui de la géométrie formelle dans lequel vivent les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Via cette équivalence, nous obtenons une traduction de la conjecture de Berthelot en terme de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques que nous détaillons ci-dessous.

Dans cet article, nous prouvons une traduction dans le langage des $\mathcal{D}$-modules arithmétiques de la conjecture de Berthelot. Plus précisément, soient X une k-variété et Y un ouvert de X tels que (Y, X) soit proprement d-réalisable, i.e., tels qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel $\mathcal{P}$ propre et lisse, un diviseur T de la fibre spéciale de $\mathcal{P}$ et une immersion (non nécessairement fermée) $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ vérifiant $Y = X \setminus T$. On désigne par $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$ le faisceau sur $\mathcal{P}$ des opérateurs différentiels d'ordre infini, de niveau fini avec des singularités surconvergentes le long de T (voir [4]). On vérifie que la sous-catégorie pleine de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}})$ des complexes à support dans X ne dépend pas du choix du plongement $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et du diviseur T de P. On la note alors $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{(Y,X)/K})$. Ses objets sont les $(F\text{-})$complexes surcohérents de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $(Y,X)/K$. On définit de même (on traite dans un premier temps le cas où Y est lisse afin d'utiliser l'équivalence entre isocristaux surconvergents et isocristaux surcohérents exprimée dans le paragraphe ci-dessus) la sous-catégorie $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{isoc}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{(Y,X)/K})$ de $(F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{surcoh}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{(Y,X)/K})$ des $(F\text{-})$complexes surcohérents de $\mathcal{D}$-modules arithmétiques sur $(Y,X)/K$ dont les espaces de cohomologie sont des $(F\text{-})$isocristaux surcohérents sur $(Y,X)/K$. Pour vérifier cette indépendance canonique, nous prouvons la propriété suivante de stabilité de la surcohérence : pour tout morphisme $f\colon \mathcal{P}' \to \mathcal{P}$ de $\mathcal{V}$-schémas formels séparés et lisses tel que $T' := f^{-1}(T)$ soit un diviseur de la fibre spéciale de $\mathcal{P}'$, pour tout $(F\text{-})$complexe à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}'}({}^{\dagger}T')_{\mathbb{Q}}$-surcohérente $\mathcal{E}'$ à support propre sur $\mathcal{P}$, l'image directe de $\mathcal{E}'$ par f est à cohomologie $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{P}}({}^{\dagger}T)_{\mathbb{Q}}$-surcohérente (voir 2.3.2). Cela correspond à une version surcohérente de la conjecture de Berthelot sur la stabilité de l'holonomie par image directe énoncée dans [6, 5.3.6].

Nous établissons dans ce papier la version suivante de la conjecture de Berthelot (voir 4.4.3) : soient (Y',X') et (Y,X) deux couples de k-variétés proprement d-réalisables, $a\colon X' \to X$ un morphisme propre tels que $a^{-1}(Y) = Y'$ et tels que le morphisme induit $Y' \to Y$ soit propre et lisse. Alors, le foncteur image directe par a se factorise sous la forme :

$$a_{+}\colon (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{isoc}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{(Y',X')/K}) \to (F\text{-})D^{\mathrm{b}}_{\mathrm{isoc}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{(Y,X)/K}).$$

En fait, si on ne se préoccupe pas de l'indépendance par rapport aux choix (e.g. du plongement $X \hookrightarrow \mathcal{P}$ et du diviseur T de P), nous prouvons une version légèrement étendue via 3.3.1, i.e. on remplace la notion de proprement d-plongeabilité par la notion de d-plongeabilité.

Remerciements. – Je remercie vivement Kiran Kedlaya pour une question posée lors de la conférence en l'honneur de Gilles Christol qui m'a incitée à m'intéresser à cette conjecture de Berthelot via les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques. Je remercie Jean-Yves Étesse pour une question analogue lors de cette même conférence. Je remercie Nobuo Tsuzuki pour les discussions notamment sur la comparaison entre les versions formelles et rigides des conjectures de Berthelot lors d'une invitation à Sendaï.

Notations. – Tout au long de cet article, nous garderons les notations suivantes : soit $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel parfait k de caractéristique $p > 0$, de corps de fractions K de caractéristique 0, d'uniformisante π. Les $\mathcal{V}$-schémas formels seront notés par des lettres calligraphiques ou gothiques et leur fibre spéciale par les lettres romanes correspondantes. On fixe $s \geq 1$ un entier naturel et F désigne la puissance s-ième de l'endomorphisme de Frobenius. Les modules sont par défaut des modules à gauche. Si $\mathcal{E}$ est un faisceau abélien, $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ désignera $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. On note m un entier positif. Si $f\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ est un morphisme de $\mathcal{V}$-schémas formels lisses, on notera par des lettres droites les fibres spéciales et $f\colon X' \to X$ sera si aucune confusion n'est à craindre le morphisme induit. Sauf mention du contraire, on supposera (sans nuire à la généralité) les k-schémas réduits. En général, lorsqu'un diviseur est vide, on évite de l'indiquer, e.g. dans les opérations cohomologiques correspondantes.