Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1182, p. 73 à 119
doi : 10.24033/ast.1183

NON-DENSITÉ DES POINTS ENTIERS ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE
[*d'après* B. Lawrence, W. Sawin et A. Venkatesh]

par **Marco Maculan**

A supposedly fun thing I'll never do again.
— D. F. Wallace

1. Introduction

Il est question ici d'une technique introduite par Lawrence et Venkatesh pour montrer la non-densité (pour la topologie de Zariski) des points entiers d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres. Les points rationnels d'une variété projective étant tous entiers et la non-densité dans une courbe étant équivalente à la finitude, la méthode conduit à une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell :

Théorème 1.1. *Soit C une courbe projective lisse connexe de genre $g \geqslant 2$ sur un corps de nombres K. Alors, l'ensemble $C(K)$ des points K-rationnels de C est fini.*

Cet énoncé, ainsi que les suivants concernant les problèmes à la Shafarevich, ont déjà été discutés dans ce séminaire par Szpiro (1985) ; j'invite le lecteur à s'y référer.

Le théorème 1.1 a été démontré en premier par Faltings (1983, 1984). Par la suite Vojta (1991) en a donné une preuve combinant les méthodes classiques d'approximation diophantienne avec des arguments dans la veine de Mumford, 1965 (voir aussi Bombieri, 1990). Kim (2005, 2009) a proposé une approche généralisant les techniques de Chabauty (1941).

Quoique la preuve proposée par Lawrence et Venkatesh partage des aspects avec les méthodes de Chabauty et Kim, elle est plus proche à celle de Faltings. Pour en comprendre le fonctionnement, il n'est donc pas inutile de commencer par en retracer les grandes lignes.

1.1. La stratégie de Faltings

On fixe un corps de nombres K et un ensemble fini S de places de K. Grâce à une construction rusée due à Kodaira (1967) et Parshin (1968), on ramène la preuve du théorème 1.1 à celle de la conjecture de Shafarevich pour les courbes :

Théorème 1.2. *Pour un entier $g \geqslant 2$, l'ensemble des classes de K-isomorphie de courbes projectives lisses sur K de genre g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

En passant à la jacobienne de la courbe, le théorème de Torelli permet de se ramener au problème analogue pour les variétés abéliennes :

Théorème 1.3. *Pour $g \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes de K-isomorphie de variétés abéliennes sur K de dimension g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

La finitude sur laquelle repose à terme la démonstration de l'énoncé précédent est la « conjecture de Shafarevich pour les points », conséquence immédiate de la minoration d'Hermite–Minkowski du discriminant d'un corps de nombres (Serre, 1997, §4.1) :

Théorème 1.4 (Hermite–Minkowski). *Pour $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions de degré d de K non ramifiées en dehors de S est fini.*

Combiné avec le théorème de densité de Čeboratev et des arguments élémentaires, il entraîne le résultat de finitude suivant pour les représentations galoisiennes dû à Faltings (Deligne, 1985, Théorème 3.1) :

Proposition 1.5. *Soient $\bar{K}$ une clotûre algébrique de K et p un nombre premier. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations continues $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$ semi-simples et pures de poids w (par rapport à S et à p) est fini.*

Je rappelle la notion de pureté :

Définition 1.6. Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, p un nombre premier, V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et w un nombre entier.

Une représentation continue $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(V)$ est *pure de poids w (par rapport à S et à p)* si elle est non ramifiée en dehors de S et, pour toute place v de K n'appartenant pas à S et ne divisant pas p, le polynôme caractéristique $P_{v,\rho}$ d'un élément de Frobenius (et donc de tous) en v est à coefficients entiers et toutes ses racines sont de valeur absolue complexe $|\mathbb{F}_v|^{w/2}$.

Pour démontrer le théorème 1.3, Faltings fixe un premier p, considère l'application

$$\left\{\begin{array}{c}\text{variétés abéliennes sur } K\\ \text{de dimension } g \text{ à bonne}\\ \text{réduction en dehors de } S\end{array}\right\}\Big/\cong \quad \xrightarrow{\mathrm{T}_p} \quad \left\{\begin{array}{c}\text{représentations continues}\\ \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_p)\end{array}\right\}\Big/\cong$$
$$A \longmapsto \mathrm{T}_p(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

associant à une variété abélienne son module de Tate p-adique

$$\mathrm{T}_p(A) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A[p^n](\bar{K})$$

tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ et se ramène à montrer la finitude de l'image et des fibres de T_p.

L'hypothèse de Riemann pour les variétés abéliennes sur les corps finis (démontrée par Weil) dit que les représentations en question sont pures de poids -1. La finitude de l'image de T_p découle de la semi-simplicité de $\mathrm{T}_p(A)$ grâce à la proposition 1.5. La semi-simplicité, ainsi que la finitude des fibres, se ramène par des arguments de Tate (1966) au résultat suivant :

Théorème 1.7. *Soit A une variété abélienne sur K. Il n'existe qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A.*

C'est le cœur technique de la preuve de Faltings : cela requiert de comprendre comment la hauteur des variétés abéliennes qu'il introduit change avec les isogénies. L'invariance cherchée est montrée par Faltings en utilisant la théorie des groupes p-divisibles et plus précisément un théorème de Raynaud (1974) sur les schémas en groupes finis annulés par p. L'irruption de la théorie de Hodge p-adique dans la démonstration proposée par Lawrence et Venkatesh est en résonance avec ce dernier argument.

Une « nouvelle » preuve de la conjecture de Mordell ne peut donc pas s'appuyer sur la semi-simplicité des modules de Tate démontrée par Faltings. On peut donner une démonstration alternative du théorème 1.7, comme le font Masser et Wüstholz (1993) (voir aussi l'exposé de Bost, 1996 dans ce séminaire), ou contourner les questions de semi-simplicité : c'est la deuxième piste que Lawrence et Venkatesh suivent. Néanmoins, leur méthode ne semble pas à ce jour pouvoir fournir une approche aux théorèmes 1.2, 1.3 et à la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres. [1]

1.2. Idée de la preuve de Lawrence et Venkatesh

Soit C une courbe projective lisse sur K de genre $g \geqslant 2$.

1.2.1. — Lawrence et Venkatesh commencent par une construction auxiliaire.

On fixe un nombre premier ℓ et on considère le groupe $G := \mathrm{Aff}(\ell)$ des transformations affines du corps à ℓ éléments $\mathbb{F}_\ell$. On désigne par C' l'espace de modules des revêtements galoisiens $X \to C$ de groupe G et qui sont ramifiés exactement en un seul point de C. Des tels revêtements existent car le groupe fondamental de C est non abélien, ce qui équivaut à l'hypothèse $g \geqslant 2$. L'application $\nu\colon C' \to C$ associant à un revêtement son point de ramification est un revêtement non ramifié de la courbe C. L'« objet universel » $\mathscr{X} \to C \times C'$ pour ce problème de modules est un revêtement galoisien de groupe G. Une variante de la construction de Prym fournit une famille de variétés abéliennes $\alpha'\colon A \to C'$.

[1] Par exemple, en ce qui concerne le théorème 1.3, un obstacle majeur à l'applicabilité de la méthode est la présence de sous-variétés de l'espace de modules des variétés abéliennes donnant lieu à une trop petite monodromie, *e.g.* des sous-variétés de Shimura.

On pose $\alpha := \nu \circ \alpha' \colon A \to C$, on note d la dimension relative de ce morphisme et δ le degré du revêtement ν. Combinant les stratégies de Faltings et de Chabauty, Lawrence et Venkatesh fixent un nombre premier p, une place p-adique v de K et s'intéressent ensuite au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} C(K) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tau"] & C(K_v) \arrow[d, "\tau_v"] \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations continues} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \Big/ \cong \arrow[r, "\rho"] & \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations continues} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \to \mathrm{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \Big/ \cong \end{tikzcd}$$

où les flèches τ, τ_v associent à un point c le premier groupe de cohomologie étale p-adique $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ de $\alpha^{-1}(c)$ et ρ est l'application de restriction à $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$. Si l'on démontre que l'image de τ est finie et les fibres de τ_v sont finies, on a gagné.

1.2.2. *Finitude des fibres.* — Tout d'abord, on peut choisir le nombre premier p de façon à ce qu'il ne ramifie pas dans K et à ce que les courbes C et C', ainsi que la famille de variétés abéliennes $A \to C'$, aient bonne réduction en toute place p-adique de K. Étant fixé un K_v-point o de C, on considère le disque v-adique

$$\Omega := \{x \in C(K_v) : x \equiv o \pmod{p}\}$$

autour de o et on se ramène à montrer que la restriction de τ_v à Ω a fibres finies.

Si jusqu'à présent la stratégie de preuve suit de près celle de Faltings, elle va s'en affranchir nettement à partir de maintenant. L'idée est de « linéariser » le problème par le biais de la théorie de Hodge p-adique, en transformant les représentations galoisiennes en des données d'algèbre linéaire, les *isocristaux filtrés*, pendant p-adique des structures de Hodge. Appliquée à la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ pour $c \in \Omega$, la théorie de Hodge p-adique fournit le triplet

$$(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(c)/K_v), \mathrm{H}^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1), \varphi_c)$$

formé par le premier groupe de cohomologie de de Rham de $\alpha^{-1}(c)$, l'espace des 1-formes différentielles sur $\alpha^{-1}(c)$ et l'opérateur de Frobenius obtenu par comparaison avec le premier groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale de $\alpha^{-1}(c)$.

Par ailleurs le fibré vectoriel $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$ est muni de la connexion de Gauss–Manin : ses sections horizontales convergent p-adiquement sur le disque Ω, donnant lieu à des isomorphismes de « transport parallèle »

$$\chi_c \colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(c)/K_v) \xrightarrow{\sim} V := \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(o)/K_v)$$

pour c dans Ω. On obtient ainsi une application de périodes p-adique

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Per}_o \colon & \Omega & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{d \deg \nu}(V) \\ & c & \longmapsto & \chi_c(\mathrm{H}^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1)). \end{array}$$

Il découle directement des définitions que si $\tau_v(c) = \tau_v(c')$, alors leurs images $\mathrm{Per}_o(c)$ et $\mathrm{Per}_o(c')$ sont conjugués sous l'action du centralisateur Z dans $\mathrm{GL}(V)$ de l'opérateur de Frobenius cristallin φ_o.

Soit X l'adhérence pour la topologie de Zariski de l'image de l'application Per_o. Si l'on sait que la dimension de X est strictement plus grande que la dimension de Z, on peut conclure la preuve. En effet, les solutions à l'équation de Gauss–Manin sont données par des séries qui convergent absolument sur tout Ω. L'image de Ω par Per_o ne pouvant pas être contenue dans une orbite Z, l'ensemble, pour c dans Ω,

$$F_c := \mathrm{Per}_o^{-1}(Z.\mathrm{Per}_o(c))$$

n'est pas Ω tout entier.

L'ensemble F_c ne peut qu'être fini : au cas contraire, il s'accumulerait dans le compact Ω en un point c_0 ; par conséquent, si $f = 0$ est une équation locale de Z autour de $\mathrm{Per}_o(c_0)$, le principe des zéros isolés pour la fonction analytique $f \circ \mathrm{Per}_o$ entraînerait que l'image de Ω est contenue dans Z. Contradiction !

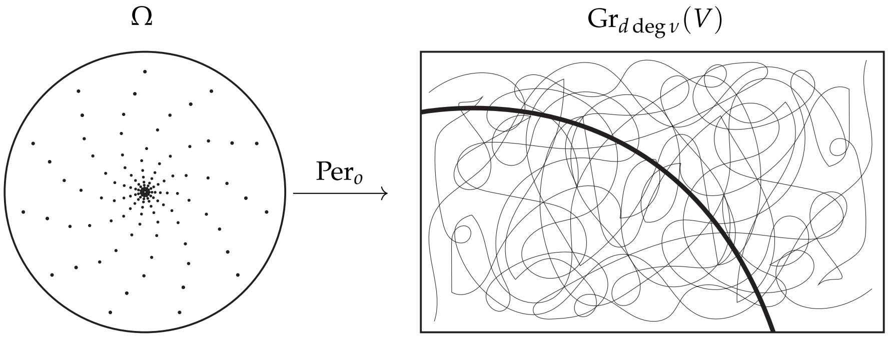

Figure 1 – À droite, en gros, l'orbite $Z.\mathrm{Per}_o(c)$ et, dessinée comme un gribouillis, l'image de l'application des périodes Per_o. À gauche les points représentent la préimage de $Z.\mathrm{Per}_o(c)$ par Per_o : comme pour une fonction holomorphe d'une variable complexe non constante, il n'y a qu'un nombre fini de zéros dans un disque compact contenu dans son domaine de définition ; sinon comme en figure ils s'accumuleraient.

Pour avoir l'inégalité $\dim X > \dim Z$, Lawrence et Venkatesh démontrent que la famille de variétés abéliennes $A \to C'$ a grande monodromie et imposent des conditions arithmétiques sur les fibres du revêtement $\nu\colon C' \to C$ (qui sont satisfaites pour des premiers ℓ bien choisis).