Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1183, p. 121 à 131
doi : 10.24033/ast.1184

FLOT DE RICCI ET DIFFÉOMORPHISMES DE VARIÉTÉS DE DIMENSION 3
[*d'après* R. Bamler et B. Kleiner]

par **Sylvain Maillot**

1. Type d'homotopie des groupes de difféomorphismes

Dans tout cet exposé M désigne une variété lisse, sans bord, orientable, connexe et compacte. On munit l'ensemble $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M de la topologie $\mathscr{C}^\infty$. On note $\mathrm{Diff}^+(M)$ (resp. $\mathrm{Diff}^-(M)$) l'ensemble des difféomorphismes de M qui préservent (resp. renversent) l'orientation. Il est bien connu que $\mathrm{Diff}(M)$ est une variété de Fréchet localement homéomorphe à l'espace des champs de vecteurs lisses sur M. Elle a le type d'homotopie d'un CW complexe (Palais, 1966) et est déterminée à homéomorphisme près par son type d'homotopie (Bessaga et Pełczyński, 1975). On est donc conduit au problème suivant :

Problème. *Calculer les groupes d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(M)$.

Comme toujours en topologie des variétés, les méthodes utilisées pour résoudre ce problème dépendent fortement de la dimension de M. Dans la suite de cette section, nous faisons un rapide tour d'horizon des dimensions autres que la dimension 3, à laquelle nous allons consacrer le reste de ce texte. Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour un survol plus détaillé.

On note S^n la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Son groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(S^n)$ s'identifie au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$.

Si M est de dimension 1, elle est difféomorphe au cercle S^1. Il est facile de voir que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}(S^1)$ est une équivalence d'homotopie. En particulier, $\mathrm{Diff}(S^1)$ a exactement deux composantes connexes, qui sont $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^1)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^1)$ est infini cyclique, engendré par un lacet de rotations dont l'angle varie de 0 à 2π. Pour tout $k \geqslant 2$ on a $\pi_k \mathrm{Diff}^+(S^1) = 0$.

Passons à la dimension 2. S. Smale a démontré que l'énoncé analogue est vrai :

Théorème 1.1 (Smale, 1959). *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^2)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^2)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Ainsi, $\mathrm{Diff}(S^2)$ a de nouveau deux composantes connexes, $\mathrm{Diff}^+(S^2)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^2)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^2)$ est cyclique d'ordre 2, engendré par un lacet de rotations d'axe fixe et dont l'angle varie de 0 à 2π.

Le cas suivant est celui du tore de dimension 2. Son premier groupe d'homologie à coefficients entiers est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. On démontre que l'application de $\mathrm{Diff}(T^2)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ qui à un difféomorphisme associe son action en homologie induit une bijection de $\pi_0 \mathrm{Diff}(T^2)$ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. De plus, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(T^2)$ a le type d'homotopie de T^2.

Dans le cas d'une surface hyperbolique, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(M)$ est contractile (Earle et Eells, 1969 ; Gramain, 1973, 1974). Cela est lié au fait que l'espace de Teichmüller est contractile.

Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour une discussion des « grandes » dimensions, c'est-à-dire $n \geqslant 5$. Nous nous contenterons de signaler que l'énoncé analogue au théorème 1.1 est faux : par exemple, il existe des difféomorphismes de S^6 qui préservent l'orientation, mais ne sont pas isotopes à l'identité. C'est ce fait qui a permis à Milnor de démontrer l'existence de structures lisses exotiques sur S^7.

Enfin, il y a très peu de résultats en dimension 4. On ne sait rien du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(S^4)$, ni de l'existence d'éventuelles structures lisses exotiques sur S^4.

2. Cas de la dimension 3

Supposons à présent que M est de dimension 3. Un résultat fondamental est l'analogue du théorème 1.1. Conjecturé par Smale, il a été démontré par Hatcher :

Théorème 2.1 (Hatcher, 1983). *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^3)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^3)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Il est naturel de chercher à généraliser ce résultat au cas où M est géométrique au sens de W. Thurston, c'est-à-dire admet une métrique riemannienne localement isométrique à l'une des huit géométries modèles S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, Nil, Sol, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^3$ (Boileau, Maillot et Porti, 2003 ; Scott, 1983 ; Thurston, 1997). On pourrait s'attendre à ce que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ soit donné par un groupe de Lie, par exemple le groupe d'isométries pour une métrique bien choisie, ou peut-être un groupe un peu plus gros, comme celui des transformations affines. Or Hatcher a démontré également le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Hatcher, 1981). *L'espace* $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ *a le type d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}(S^2) \times \Omega \,\mathrm{Diff}(S^2)$.

On rappelle que ΩX est l'espace des lacets pointés dans X. En combinant les théorèmes 1.1 et 2.2, on obtient que $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(3) \times \Omega\,\mathrm{SO}(3)$. Comme $H_{2k}(\Omega\,\mathrm{SO}(3)) \neq 0$ pour tout entier k, il en résulte qu'il n'existe aucun groupe de Lie homotopiquement équivalent à $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$.

Le cas de $S^1 \times S^2$ est cependant exceptionnel. Pour les autres variétés géométriques, on conjecture que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ est bien celui d'un groupe de Lie qui reflète la géométrie. Cette conjecture est aujourd'hui démontrée dans un grand nombre de cas. Nous limiterons notre discussion aux cas les plus rigides des variétés sphériques et hyperboliques, et renvoyons encore à Hatcher (2003), ainsi qu'à la bibliographie de Bamler et Kleiner (2019b) pour une discussion des autres cas.

Rappelons que M est dite *sphérique* (resp. *hyperbolique*) si elle admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à 1 (resp. -1). Une telle métrique est unique à l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ près : cela résulte du théorème de rigidité de G. De Rham dans le cas sphérique (De Rham, 1950) et de celui de G. Mostow dans le cas hyperbolique (Mostow, 1973). La conjecture de Smale généralisée affirme que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.

Dans le cas hyperbolique, D. Gabai a démontré cette conjecture :

Théorème 2.3 (Gabai, 2001). *Soit M une variété de dimension 3 hyperbolique. L'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.*

Le cas des variétés sphériques a une longue histoire, résumée dans la monographie Hong et al. (2012). Les méthodes topologiques permettent de montrer que $\pi_0\,\mathrm{Isom}(M) = \pi_0\,\mathrm{Diff}(M)$ pour toutes les variétés sphériques, en calculant explicitement ces groupes. Elles permettent également de traiter l'homotopie supérieure dans de nombreux cas, en se ramenant au théorème 2.1.

En 2017, Bamler et Kleiner ont démontré la conjecture de Smale généralisée pour toutes les variétés sphériques sauf $\mathbb{R}P^3$ (Bamler et Kleiner, 2017a). Cette preuve utilise le théorème 2.1, et ne redémontre donc pas le cas de S^3. Elle permet également de redémontrer le théorème 2.3, toujours modulo le théorème 2.1.

En 2019 les mêmes auteurs ont finalement obtenu une preuve de la conjecture valable dans tous les cas, et qui n'utilise pas le théorème 2.1 :

Théorème 2.4 (Bamler et Kleiner, 2019b). *Soit M une variété de dimension 3 sphérique. L'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.*

Remarquons que la méthode utilisée permet également de donner une nouvelle preuve du théorème 2.3. [(1)]

[(1)] Tout récemment, Bamler et Kleiner ont étendu leur méthode de façon à démontrer la conjecture de Smale généralisée pour les variétés dont la géométrie est modelée par le groupe de Heisenberg Nil (Bamler et Kleiner, 2021).

Dans la suite de ce texte, nous expliquons comment les travaux de G. Perelman, puis B. Kleiner et J. Lott et enfin R. Bamler et B. Kleiner sur le flot de Ricci (Bamler et Kleiner, 2017b ; Kleiner et Lott, 2017 ; Perelman, 2003) ont permis de prouver le théorème 2.4. Pour approfondir le sujet, nous recommandons, outre les articles originaux, le survol de Bamler dans les Notices de l'A.M.S. (Bamler, 2021a), ainsi que le mini-cours donné par Bamler à l'École d'été de l'Institut Fourier (Bamler, 2021b).

3. Espaces de métriques riemanniennes

Dans toute la suite du texte, on suppose que M est de dimension 3. On note $\mathrm{Met}(M)$ l'espace des métriques riemanniennes lisses sur M. Muni de la topologie $\mathscr{C}^\infty$, c'est une variété de Fréchet. On note $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ le sous-espace formé des métriques localement isométriques à S^3 ou $S^2 \times \mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (Bamler et Kleiner, 2019b). *L'espace* $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 2.4 se déduit du théorème 3.1 de la façon suivante : soit M une 3-variété sphérique. Fixons $g_0 \in \mathrm{Met}_{CC}(M)$ et considérons l'application $\pi : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui à ϕ associe $\phi_*(g_0)$. D'après De Rham (1950) l'application π est surjective. On montre que c'est en fait une fibration, dont la fibre est par définition $\mathrm{Isom}(M, g_0)$. On conclut grâce à la suite exacte longue en homotopie.

De façon similaire, le théorème 3.1 permet de donner une nouvelle démonstration du théorème 2.2, ainsi que la détermination du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3)$.

Notons $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ l'espace des métriques à courbure scalaire strictement positive sur M. Cet espace est non-vide si et seulement si M est une somme connexe de variétés sphériques et/ou de copies de $S^1 \times S^2$ (Perelman, 2003) :

Théorème 3.2 (Bamler et Kleiner, 2019b). *L'espace* $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 3.2 vient compléter un résultat de F. Coda Marques qui prouvait la connexité par arcs du quotient de cet espace par $\mathrm{Diff}(M)$ (Marques, 2012). Notons qu'en grandes dimensions cet espace n'est en général pas contractile, ni même connexe par arcs. Nous renvoyons à Rosenberg (2007) pour un survol.

4. L'approche par le flot de Ricci

Supposons M sphérique. Comme $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ est une variété de Fréchet séparable, pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de prouver que tous ses groupes d'homotopie sont nuls.

Soit k un entier naturel, et soit f une application continue de S^k dans $\mathrm{Met}_{CC}(M)$. Comme l'espace $\mathrm{Met}(M)$ est contractile, f admet un prolongement $\bar{f} : B^{k+1} \to \mathrm{Met}(M)$.

Si l'on disposait d'une façon canonique de déformer une métrique riemannienne quelconque en une métrique à courbure constante, et ce de façon continue par rapport à un multi-paramètre, on obtiendrait une application $g : B^{k+1} \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui prolonge f, ce qui résoudrait notre problème.

Le point de départ est de considérer les solutions d'une équation aux dérivées partielles introduite par R. Hamilton :

$$\frac{dg}{dt} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}, \tag{1}$$

où Ric désigne la courbure de Ricci. Nous appellerons *flot de Ricci* un couple $(N, \{g(t)\}_{t\in I})$ où N est une variété lisse (toujours sans bord, mais pas nécessairement compacte) et $g(\cdot)$ est une famille de métriques riemanniennes sur N dépendant de façon lisse d'un paramètre t prenant ses valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1). Pour x dans N et t dans I on note $B(x,t,r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la métrique $g(t)$. On note $R(x,t)$ la courbure scalaire au point x pour la métrique $g(t)$.

Pour toute métrique g_0 sur notre variété compacte M, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un unique flot de Ricci $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,\varepsilon[})$ satisfaisant la condition initiale $g(0) = g_0$ (Hamilton, 1982). On peut donc considérer le temps $T_{max} \in]0,+\infty]$ tel que l'intervalle de définition maximal d'un tel flot soit $[0, T_{max}[$. Si $T_{max} < +\infty$ on dit que le flot *admet une singularité* au temps T_{max}.

La première intuition est que l'équation (1) est similaire à l'équation de la chaleur ; elle a donc des propriétés régularisantes et dans les cas les plus favorables, la courbure tend à s'uniformiser :

Théorème 4.1 (Hamilton, 1982). *Supposons que g_0 est à courbure de Ricci strictement positive. Alors $T_{max} < +\infty$ et il existe une fonction $\lambda : [0, T_{max}[\to]0,+\infty[$ ayant pour limite $+\infty$ en T_{max} telle que la métrique rééchelonnée $\lambda(t)g(t)$ converge à difféomorphisme près vers une métrique à courbure constante.*

En général, si le flot admet une singularité, on sait que le maximum de la courbure scalaire tend vers l'infini quand $t \to T_{max}$. On peut considérer l'ensemble $\Omega \subset M$ des points x tels que la courbure scalaire en (x,t) reste bornée quand $t \to T_{max}$. L'ensemble Ω est un ouvert de M (Perelman, 2003). On sait que sur Ω le flot converge, mais la théorie générale ne permet pas de prolonger le flot, puisqu'en général Ω n'est pas compact.

Dans sa preuve de la conjecture de géométrisation, Perelman introduit une fonction de cutoff $\delta(t)$ qui permet de prolonger le flot au-delà de T_{max} en effectuant des chirurgies aux petites échelles. Cette contruction est insuffisante pour démontrer le théorème 3.1, car elle n'est pas continue par rapport à un paramètre. Toutefois, l'analyse des régions où la courbure scalaire devient grande joue un rôle important, et nous allons la présenter de façon détaillée dans la section suivante.