Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1184, p. 133 à 179
doi : 10.24033/ast.1185

**STRUCTURE DES LIMITES DES VARIÉTÉS NON EFFONDRÉES
À COURBURE DE RICCI MINORÉE**
[*d'après* J. Cheeger, W. Jiang and A. Naber]

par **Ilaria Mondello**

Introduction

Un célèbre théorème, démontré en 1981 par M. Gromov, affirme que toute suite de variétés riemanniennes pointées (M_i^n, g_i, p_i), dont la courbure de Ricci est uniformément minorée, admet une sous-suite convergente au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff pointée vers un espace métrique (X, d, p). Depuis lors, de nombreux mathématiciens, M. Anderson, S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, J. Cheeger, T. H. Colding, G. Tian, A. Naber, W. Jiang, ont étudié la structure de cet espace limite en essayant d'établir dans quelle mesure elle diffère de celle d'une variété riemannienne lisse : quelles sont les singularités qui peuvent apparaître ? Est-ce qu'il y en a peu, beaucoup, dans quel sens ? Dans ce texte, nous nous concentrerons sur les avancées récentes apportées par les travaux de Cheeger et Naber, 2015, Jiang et Naber, 2021, et Cheeger, Jiang et Naber, 2021, dans le cas d'une suite de variétés non effondrées, c'est-à-dire avec la condition supplémentaire que le volume d'une boule unité est uniformément minoré.

Les premiers résultats dans l'étude des espaces limites de variétés riemanniennes non effondrées ont été obtenus en supposant que la courbure de Ricci est bornée et pas seulement minorée. En dimension 2 et 3, une borne sur la courbure de Ricci est équivalente à une borne sur la courbure sectionnelle ou sur la courbure de Riemann. Dans ce cas, un résultat de pré-compacité en topologie Lipschitz découle des travaux sur le théorème de finitude des difféomorphismes de Cheeger, 1967 (voir aussi Dai et Rong, 2012). Il est en effet possible de démontrer qu'une suite de variétés non effondrées dont la courbure sectionnelle est bornée converge, au sens C^α de la métrique, vers une variété munie d'une métrique C^α (voir le chapitre 10 du livre de Petersen, 2016).

En dimension 4 en revanche, des singularités peuvent apparaître, comme le montre l'exemple de la métrique de Eguchi–Hanson ré-échelonnée, qui développe une singularité conique isolée (exemple 1.3 de ce texte). À la fin des années 80, plusieurs résultats ont été prouvés, d'abord dans le cas où la courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, c'est-à-dire Einstein, puis lorsque la courbure de Ricci est seulement supposée bornée. Les travaux de Anderson, 1989, Bando, Kasue et Nakajima, 1989, Tian, 1990, et Anderson, 1990, ont ensuite démontré qu'en supposant, en plus du non effondrement et de la borne sur la courbure de Ricci, un contrôle uniforme de la topologie et du diamètre, l'espace limite est une variété riemannienne en dehors d'un nombre fini de singularités coniques orbifolds (voir aussi le théorème 4 de Anderson, 1995). Cela repose sur le fait que, en vertu de la formule de Chern–Gauss–Bonnet, le contrôle de la topologie et du diamètre implique une borne uniforme pour la norme L^2 de la courbure de Riemann. Plusieurs conjectures ont été formulées à partir de ce résultat. Tout d'abord la conjecture de la codimension 4, selon laquelle, en toute dimension n et sans hypothèse sur la courbure de Riemann, un espace limite de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée ne contient que des singularités de codimension supérieure ou égale à 4. En particulier, selon cette conjecture, les contrôles de la topologie et du diamètre ne sont pas nécessaires en dimension 4 pour que la limite ne possède que des singularités de type orbifold (voir la conjecture 3 de Anderson, 1995, et le paragraphe qui la précède). Il a de plus été conjecturé que la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-4}$ de l'ensemble des singularités est localement finie.

Entre la fin des années 90 et le début des années 2000, la conjecture de la codimension 4 a été prouvée en toute dimension dans des cas particuliers : lorsque la norme L^2 de la courbure de Riemann est bornée, ou lorsque la métrique est kählerienne. Ce sont des conséquences du théorème 1.15 de Cheeger, Colding et Tian, 2002 (voir respectivement les Remarques 1.17 et 1.18) ou également, pour le cas Kähler, du théorème 6.1 de Cheeger, 2003. Parallèlement, T. H. Colding et J. Cheeger ont développé une riche théorie qui a permis une meilleure compréhension de la géométrie des espaces limites, sous l'hypothèse moins restrictive de courbure de Ricci uniquement minorée. Ils ont démontré, entre autres, que le non effondrement et la minoration uniforme de la courbure de Ricci permettent d'obtenir des informations locales sur la géométrie de l'espace limite, exprimées à l'aide des cônes tangents. Un cône tangent en un point est obtenu comme un éclatement de l'espace en ce point, via un changement d'échelle. La théorie de Cheeger–Colding affirme alors que, pour les limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée, tout cône tangent est un cône métrique de la forme $\mathbb{R}^k \times C(Z)$, où $C(Z)$ est le cône sur un espace métrique Z. Cela donne lieu à une stratification de l'espace limite X en sous-ensembles singuliers $S^k(X)$ définis par la propriété que $x \in S^k(X)$ si et seulement si aucun cône tangent en x ne scinde un espace euclidien de dimension $(k+1)$. On a donc une stratification de l'espace limite donnée par

$$S^0(X) \subset \cdots \subset S^{n-1}(X) \subset X.$$

On désigne la k-ième strate singulière par $\Sigma^k(X) = S^k(X) \setminus S^{k-1}(X)$. À partir de cette stratification, désormais classique, T. H. Colding et J. Cheeger ont alors démontré qu'on peut décomposer X en un ensemble régulier $\mathscr{R} := X \setminus S^{n-1}(X)$, bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse, et un ensemble singulier de codimension au moins 2. Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

Théorème A (J. Cheeger, T. H. Colding). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1) \ \textit{et} \ \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

convergeant vers un espace métrique (X, d, p). Alors :

1. *La strate singulière $\Sigma^{n-1}(X)$ est vide.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U_ε et $\alpha(\varepsilon, n) \in]0, 1[$, avec $\alpha(\varepsilon, n) \to 1$ quand ε tend vers 0, tels que U_ε contient $\mathscr{R}$ et est $\alpha(\varepsilon, n)$-bi-Hölder homéomorphe à une variété riemannienne de dimension n.*
3. *Pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, la dimension de Hausdorff de $S^k(X)$ est inférieure ou égale à k. En particulier l'ensemble singulier $\mathscr{S} := S^{n-2}(X)$ vérifie*

$$\dim_{\mathscr{H}} \mathscr{S} \leqslant (n-2).$$

Le premier point découle du fait que l'existence d'une strate de codimension 1 impliquerait l'apparition d'un bord à la limite, ce qui n'arrive pas lorsque l'on considère des suites de variétés *sans bord*. L'information sur la dimension de Hausdorff est significative mais reste en un certain sens faible : on peut, par exemple, construire un espace limite dont le lieu singulier est dense et a mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-2}$ infinie (voir l'exemple 1.2 ci-dessous). En outre, les cônes tangents ne sont pas uniques, comme le montre l'exemple 8.41 de Cheeger et Colding, 1997, originalement dû à G. Perelman. Ils peuvent de plus présenter des comportements pathologiques; Colding et Naber, 2013, ont construit en toute dimension $n \geqslant 3$ des suites de variétés non effondrées à Ricci minoré, convergentes vers un espace (X, d, p) tel que pour tout entier $k = 0, \dots, n-2$, il existe un cône tangent en p qui scinde un espace euclidien de dimension k, mais qui ne scinde pas d'espace euclidien de dimension $k+1$. En dimension 5, ils ont exhibé également un espace limite (Y, d, y) qui possède deux cônes tangents en y, dont les sections ne sont pas homéomorphes. Dans le même article, T. H. Colding et A. Naber ont conjecturé que l'ensemble des points où le cône tangent n'est pas unique a dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-3$.

En 2011, J. Cheeger et A. Naber ont introduit un nouvel outil, inspiré par les travaux précédents de Cheeger, 2012, et de Cheeger et Naber, 2013b : la stratification quantitative (voir l'article de Cheeger et Naber, 2013a). Grâce à cette dernière, ils ont pu relier des bornes L^q, $q < 2$, sur la courbure de Riemann avec des estimées de volume pour le voisinage tubulaire d'une strate quantitative (voir le théorème 1.8 de Cheeger et Naber, 2015). Au cours des sept années suivantes, leurs travaux avec W. Jiang ont résolu l'ensemble des conjectures citées ci-dessus. Dans le cas où la courbure de Ricci est bornée, J. Cheeger et A. Naber ont démontré la conjecture de la codimension 4 et W. Jiang et A. Naber ont montré des bornes L^2 a priori pour la courbure de Riemann, en toute dimension, conjecturées par Naber, 2014 et Cheeger et Naber, 2015 (voir respectivement les articles de Cheeger et Naber, 2015, et Jiang et Naber, 2021). Lorsque la courbure de Ricci est uniquement minorée, parmi les nombreux résultats de leur dernier article, Cheeger, Jiang et Naber, 2021, ont prouvé l'unicité des cônes tangents en dehors d'un ensemble de mesure $\mathscr{H}^{n-2}$ nulle. En outre, ils ont démontré que, même si les ensembles S^k ne se comportent pas comme des sous-variétés de dimension k, ils sont *k-rectifiables* : en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^k$ nulle, ils sont recouverts par des cartes bi-Lipschitz à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$. Plus précisément, nous pouvons énoncer les trois résultats suivants.

Théorème B (Rectifiabilité des strates, Cheeger, Jiang et Naber, 2021). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1) \textit{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) dans la topologie de Gromov–Hausdorff pointée. Alors pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$ l'ensemble $S^k(X)$ est k-rectifiable. En outre, en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^k$ nulle, si $x \in S^k(X)$, alors tous les cônes tangents scindent un espace euclidien $\mathbb{R}^k$.

Ce théorème, avec la convergence du volume de Cheeger–Colding, implique directement que les cônes tangents sont uniques en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^{n-2}$ nulle (voir le théorème 1.15 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème C (Codimension 4, Cheeger et Naber, 2015 et mesure localement finie, Jiang et Naber, 2021). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leqslant (n-1) \textit{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) au sens de Gromov–Hausdorff pointé. Alors l'ensemble singulier $\mathscr{S}$ est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-4$, il est $(n-4)$-rectifiable et de mesure $\mathscr{H}^{n-4}$ localement finie.

À l'aide de ce théorème, J. Cheeger et A. Naber ont aussi pu démontrer de nouveaux résultats pour les variétés lisses de dimension 4, non effondrées et à courbure de Ricci bornée ; par exemple le nombre fini de types de difféomorphismes lorsque le diamètre est borné, ou le fait qu'une 4-variété Ricci plate à croissance euclidienne du volume est asymptotiquement localement plate (voir respectivement le théorème 1.12 et le corollaire 8.86 de l'article de Cheeger et Naber, 2015).

Théorème D (Bornes L^2 pour la courbure de Riemann, Jiang et Naber, 2021). *Il existe une constante $C(n,v)$ telle que pour toute variété riemannienne (M^n,g) qui vérifie $\|\operatorname{Ric}_g\| \leqslant (n-1)$ et $\operatorname{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$,*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_g(B_1(p))}\int_{B_1(p)} \|\mathrm{Rm}_g\|^2 dv_g \leqslant C(n,v).$$

Certaines des techniques utilisées dans les démonstrations de ces résultats ont été parallèlement exploitées en dehors du contexte des limites de variétés, dans l'étude des singularités des solutions de nombreuses équations géométriques ou des minimiseurs de problèmes variationnels : on peut citer par exemple les travaux de Naber et Valtorta, 2017a, Naber, Valtorta et Veronelli, 2019, Breiner et Lamm, 2015, sur les applications harmoniques ; ceux de Cheeger, Haslhofer et Naber, 2013, et Cheeger, Haslhofer et Naber, 2015, sur le flot de la courbure moyenne ; ou encore l'article de Naber et Valtorta, 2019, sur les connexions de Yang–Mills ; les articles de Focardi, Marchese et Spadaro, 2015, et de De Lellis et al., 2018, sur les surfaces minimales au sens des courants de codimension supérieure à 1, ou de Edelen et Engelstein, 2019, concernant des problèmes à bord libre. En outre, une question naturelle liée à la théorie de Cheeger–Colding est celle de la définition d'une notion généralisée de la minoration de la courbure de Ricci pour des espaces métriques mesurés, stable par rapport à la convergence de Gromov–Hausdorff. Une réponse possible été donnée par la désormais vaste théorie des espaces RCD, initiée à partir de 2006 par les travaux de J. Lott, K. T. Sturm et C. Villani et de L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. Des travaux récents montrent comment les techniques liées à la stratification quantitative sont aussi fructueuses dans le cadre des espaces RCD (voir par exemple las articles de Mondino et Naber, 2019, Antonelli, Brué et Semola, 2019 et Brué, Pasqualetto et Semola, 2019).

Dans ce texte, nous essayons de présenter les grandes lignes de la théorie de Cheeger–Colding et des développements récents apportés par J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber : nous illustrons certains de ses outils principaux et essayons de dégager les idées importantes, en renvoyant aux articles originaux pour les détails. Nous nous concentrons principalement sur le théorème B, dont la démonstration repose sur des estimées de volume pour les voisinages tubulaires des strates quantitatives. Nous présentons la structure de la démonstration de ces estimées, en soulignant ses points communs, et ses différences, avec la théorie de Cheeger–Colding et avec les démonstrations des théorèmes C et D. Enfin, pour donner une idée plus précise des techniques utilisées dans les articles de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, nous présentons un des théorèmes qui interviennent dans la preuve des estimées de volume et sa démonstration : le théorème de transformation. Nous avons choisi ce dernier car sa preuve est représentative de certaines des techniques communes aux trois derniers articles des auteurs, comme l'utilisation de la démonstration par l'absurde, l'exploitation des interactions entre l'analyse et la géométrie, le passage d'une propriété