Séminaire BOURBAKI Avril 2022
73e année, 2021–2022, no 1192, p. 433 à 451
doi : 10.24033/ast.1193

VERS LA CONJECTURE DE KANNAN–LOVÁSZ–SIMONOVITS
[*d'après* Yuansi Chen]

par **Guillaume Aubrun**

1. Introduction

1.1. Profil isopérimétrique

Soit (X, d) un espace métrique muni d'une mesure borélienne μ. Si A est une partie de X et $\varepsilon > 0$, on note A_ε la réunion des boules ouvertes de rayon ε dont le centre appartient à A. Si A est un borélien, on peut définir sa mesure de bord comme

$$\mathrm{bord}_\mu(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Le profil isopérimétrique de l'espace métrique mesuré (X, d, μ) est défini comme la solution du problème de minimisation suivant, pour un réel t donné

$$I_\mu(t) = \inf\{\mathrm{bord}_\mu(A) \,:\, A \subset X \text{ borélien}, \mu(A) = t\}.$$

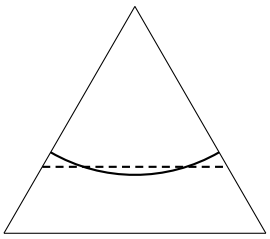

Figure 1 – Si on veut partitionner un triangle équilatéral en deux parties de même aire, la coupe rectiligne la plus courte est comparable (environ 5% plus longue) à la coupe curviligne la plus courte. La conjecture KLS affirme que le même phénomène est vrai pour un convexe de dimension arbitraire.

Autrement dit, à mesure fixée, on veut minimiser la mesure de bord. La solution exacte du problème isopérimétrique n'est connue que dans de rares situations très

©Astérisque 438, SMF 2022

symétriques. À défaut, on peut se satisfaire d'une solution approximative. Nous nous plaçons dans cette optique, dans le cas particulier où X est un convexe de volume fini et strictement positif de l'espace euclidien usuel $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ et où la mesure μ est la mesure de Lebesgue restreinte à X. Dans ce contexte, la conjecture de Kannan, Lovász et Simonovits (1995), ou conjecture KLS, affirme que restreindre l'infimum dans la définition de $I_\mu(1/2)$ aux parties A de la forme $X \cap H$, où H est un demi-espace de $\mathbf{R}^n$, n'affecte sa valeur que par une constante multiplicative indépendante de la dimension. Si la conjecture KLS est toujours ouverte, des progrès spectaculaires vers sa résolution ont été accomplis par Chen (2021).

Ce texte est organisé comme suit. Dans une première partie, on donne une présentation de la conjecture KLS et des conjectures liées. La seconde partie introduit le schéma de localisation stochastique d'Eldan, qui est l'outil principal sur lequel repose la preuve de Chen. La preuve elle-même est détaillée dans une troisième partie.

Précisons quelques notations utilisées dans le texte. Étant données deux quantités réelles strictement positives A et B dont la valeur peut dépendre de plusieurs paramètres, la notation $A \lesssim B$ (ou de manière équivalente $B \gtrsim A$) signifie que l'ensemble des valeurs prises par le quotient A/B est une partie majorée de $\mathbf{R}$. La notation $A \asymp B$ signifie l'on a simultanément $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

1.2. Mesures log-concaves

Dans ce texte, toutes les mesures considérées seront implicitement des mesures de probabilité. On dit qu'une mesure μ sur $\mathbf{R}^n$ est log-concave si elle admet une densité $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et si $\log p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est une fonction concave.

Un exemple fondamental de mesure log-concave est donnée par la mesure uniforme sur un ensemble convexe borné d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$. Les mesures gaussiennes sont également log-concaves. Pour des questions de géométrie des convexes, il est souvent utile de considérer la classe des mesures log-concaves, qui jouit de plus grandes propriétés de stabilité. Retenons en particulier le théorème de Prékopa qui affirme qu'une marginale d'une mesure log-concave est log-concave ; ce qu'on veut dire par là est que si μ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$, son image par une surjection linéaire de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^m$ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^m$.

Notons également la caractérisation suivante : une mesure absolument continue μ sur $\mathbf{R}^n$ est log-concave si et seulement si elle vérifie l'inégalité de Brunn–Minkowski

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t}$$

pour tout réel t de $[0,1]$ et pour toutes parties compactes A, B de $\mathbf{R}^n$.

Un résultat remarquable (Milman, 2009 ; Sternberg et Zumbrun, 1999) qui sera très utile pour nos considérations, est que la log-concavité peut se lire sur le profil isopérimétrique.

Théorème 1.1. *Si μ est une mesure* log*-concave sur $\mathbf{R}^n$, son profil isopérimétrique I_μ est une fonction concave qui vérifie $I_\mu(t) = I_\mu(1-t)$. Elle est donc maximale en* $1/2$.

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$ de densité p. La concavité du profil isopérimétrique implique en particulier la minoration suivante : pour $t \in [0,1]$

$$I_\mu(t) \geqslant 2I_\mu(1/2)\min(t,1-t) \geqslant 2I_\mu(1/2)t(1-t). \tag{1}$$

Si $A \subset \mathbf{R}^n$ est une partie régulière (ce qu'on peut définir par exemple en disant que sa frontière est de classe C^2), sa mesure de bord, que l'on notera $\mu^+(\partial A)$ plutôt que $\mathrm{bord}_\mu(A)$, s'écrit comme

$$\mu^+(\partial A) = \int_{\partial A} p(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

On peut restreindre l'infimum définissant le profil isopérimétrique aux parties régulières, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(\partial A) \,:\, A \subset \mathbf{R}^n \text{ régulière}, \mu(A) = t\}.$$

1.3. Conjecture de Kannan, Lovász et Simonovits : formulation et historique

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$. On obtient évidemment une majoration du profil isopérimétrique de μ en restreignant le problème de minimisation aux demi-espaces. (On appelle demi-espace de $\mathbf{R}^n$ tout ensemble de la forme $f^{-1}([a,+\infty[)$, où a est un réel et f est une forme linéaire non identiquement nulle sur $\mathbf{R}^n$.) Définissons le profil isopérimétrique linéaire de μ, pour un réel $t \in [0,1]$, comme

$$I_\mu^{\mathrm{lin}}(t) = \inf\{\mu^+(\partial H) \,:\, H \subset \mathbf{R}^n \text{ demi-espace}, \mu(H) = t\}, \tag{2}$$

de sorte que $I_\mu \leqslant I_\mu^{\mathrm{lin}}$. La conjecture KLS postule que le quotient $I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2)/I_\mu(1/2)$ est borné par une constante indépendante de la dimension. Pour l'étudier, posons

$$\mathrm{KLS}_n = \sup\left\{\frac{I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2)}{I_\mu(1/2)} \,:\, \mu \text{ mesure log-concave sur } \mathbf{R}^n\right\}. \tag{3}$$

Conjecture 1.2 (Conjecture KLS). *La suite* (KLS_n) *est bornée.*

Des bornes polynomiales de la forme $\mathrm{KLS}_n \lesssim n^\alpha$ ont été obtenues avec les améliorations successives $\alpha = \frac{1}{2}$ (Kannan, Lovász et Simonovits, 1995), $\alpha = \frac{1}{3} + o(1)$ (Eldan, 2013) puis $\alpha = \frac{1}{4}$ (Lee et Vempala, 2017). Un progrès spectaculaire plus récent, dû à Chen (2021) est l'objet de ce texte [(1)].

[(1)] Un progrès encore plus spectaculaire, l'estimation $\mathrm{KLS}_n \lesssim \log(n)^5$, a été annoncé par Klartag et Lehec (2022) quelques jours avant l'exposé. La preuve présentée utilise également le schéma de localisation stochastique.

Théorème 1.3 (Chen). *Il existe un réel C tel que, pour tout $n \geqslant 3$*

$$\mathrm{KLS}_n \leqslant \exp\left(C\sqrt{\log n}\sqrt{\log\log n}\right).$$

Remarque 1.4. Voici un exemple qui montre que le quotient $I_\mu^{\mathrm{lin}}/I_\mu$ n'est pas majoré uniformément sur $]0,1[$. Soit μ la mesure uniforme sur un disque $D \subset \mathbf{R}^2$. Les solutions du problème isopérimétrique sont les parties dont la frontière est un arc de cercle intersectant ∂D orthogonalement. On en déduit que pour t au voisinage de 0, on a les relations $I_\mu(t) \asymp t^{1/2}$ et $I_\mu^{\mathrm{lin}}(t) \asymp t^{1/3}$.

Remarque 1.5. Appelons mesure log-concave uniforme une mesure log-concave dont la densité est constante sur son support. Nous avons formulé la conjecture KLS en prenant la borne supérieure dans (3) sur l'ensemble des mesures log-concaves sur $\mathbf{R}^n$. On obtient une conjecture formellement équivalente en restreignant la borne supérieure aux mesures log-concaves uniformes. La raison est que toute mesure log-concave est limite de marginales de mesures log-concaves uniformes. En effet, soit une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$ de densité p. Pour un entier s, considérons l'ensemble $K_s \subset \mathbf{R}^{n+s}$ défini par

$$K_s = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \,:\, \|y\| \leqslant 1 + s^{-1}\log p(x)\}$$

qui est convexe par l'inégalité de Brunn–Minkowski. L'image de la mesure uniforme sur K_s par la projection de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$ sur $\mathbf{R}^n$ a une densité proportionnelle à $(1+s^{-1}\log p)_+^s$, qui tend vers p lorsque s tend vers l'infini.

1.4. Profil isopérimétrique linéaire et matrice de covariance

Expliquons comment le problème de minimisation restreint aux demi-espaces peut être résolu approximativement. Si μ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$, on note $\boldsymbol{b}(\mu) = \int \boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$ son barycentre, et $\mathsf{Cov}(\mu)$ sa matrice de covariance (ou d'inertie) définie par

$$\mathsf{Cov}(\mu) = \int_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}(\mu))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}(\mu))^t\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^t\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}(\mu)\boldsymbol{b}(\mu)^t.$$

On dira qu'une mesure log-concave est isotrope si elle vérifie les conditions de normalisation $\boldsymbol{b}(\mu) = 0$ et $\mathsf{Cov}(\mu) = \mathrm{Id}$. Si A est une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$, sa norme d'opérateur, qui est sa plus grande valeur propre en valeur absolue, s'écrit

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{\theta}\|=1} \langle \mathsf{A}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle.$$

La proposition suivante montre que le profil isopérimétrique linéaire s'estime aisément à partir de la matrice de covariance.

Proposition 1.6. *On a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute mesure* log-*concave μ sur $\mathbf{R}^n$,*

$$I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2) \asymp \|\operatorname{Cov}(\mu)\|^{-1/2}.$$

Esquisse de démonstration. La première partie de la preuve consiste à démontrer l'inégalité souhaitée en dimension 1, qui s'écrit ainsi : si $p\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ est une densité de probabilité log-concave de médiane m et de variance v, alors

$$p(m) \asymp v^{-1/2}. \tag{4}$$

Cette inégalité peut se démontrer par des considérations élémentaires sur les fonctions d'une variable réelle.

Montrons maintenant le résultat annoncé. Soit $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$ et $H_{\boldsymbol{\theta}}$ l'unique hyperplan orthogonal à $\boldsymbol{\theta}$ vérifiant $\mu(H_{\boldsymbol{\theta}}) = 1/2$. Considérons l'image de la mesure μ par la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}$, identifié à $\mathbf{R}$. Par le théorème de Prékopa, cette mesure est log-concave. Sa densité vérifie donc l'inégalité (4) qui se traduit pour la mesure μ en

$$\mu^+(\partial H_{\boldsymbol{\theta}}) \asymp \langle \operatorname{Cov}(\mu)\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle^{-1/2}.$$

La conclusion de la proposition 1.6 s'en déduit en prenant la borne inférieure sur $\boldsymbol{\theta}$. □

1.5. Constante de Poincaré

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$. On appelle *constante de Poincaré* de μ, et on note $C_P(\mu)$, la plus petite constante vérifiant l'inégalité

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant C_P(\mu) \int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla f\|^2 \,\mathrm{d}\mu \tag{5}$$

pour toute fonction régulière $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, où l'on note $\mathbf{Var}_\mu(f) = \int f^2 \,\mathrm{d}\mu - (\int f \,\mathrm{d}\mu)^2$. Son inverse $C_P(\mu)^{-1}$ est le trou spectral de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur $L^2(\mu)$; ce dernier est directement relié au profil isopérimétrique par la relation

$$C_P(\mu)^{-1} \asymp I_\mu(1/2)^2. \tag{6}$$

L'inégalité $C_P(\mu)^{-1} \gtrsim I_\mu(1/2)^2$, dite inégalité de Cheeger, est valable dans un contexte beaucoup plus général. Il est connu depuis Buser (1982) et Ledoux (1994) que l'inégalité inverse est vraie sous hypothèse de log-concavité.

Lorsque μ est la mesure uniforme sur un convexe K, sa constante de Poincaré intervient dans des problèmes fondamentaux de géométrie algorithmique en grande dimension. Comment échantillonner un point de K ? Comment estimer le volume de K ? Les meilleurs algorithmes connus à ce jour ont une complexité qui fait intervenir la constante KLS_n et le théorème de Chen a donc des conséquences immédiates pour garantir leur efficacité. Nous renvoyons à Lee et Vempala (2019) pour une présentation détaillée de toutes ces questions.