Séminaire BOURBAKI Avril 2022
73e année, 2021–2022, no 1194, p. 479 à 494
doi : 10.24033/ast.1195

MESURES CRISTALLINES ET APPLICATIONS
[*d'après* P. Kurasov, N. Lev, A. Olevskii, P. Sarnak, et M. Viazovska]

par **Yves Meyer**

Introduction

L'étude des mesures cristallines a une longue histoire qui remonte à la formule sommatoire de Poisson et à la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta, telle qu'elle fut donnée par Riemann lui-même. Ensuite interviennent Jean-Pierre Kahane, Szolem Mandelbrojt, et Andrew Guinand à la fin des années cinquante. Enfin apparaissent Maryna Viazovska et ses collaborateurs. Une mesure cristalline est une mesure atomique sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est localement fini et dont la transformée de Fourier au sens des distributions est également une mesure atomique portée par un ensemble localement fini. L'exemple le plus simple est le peigne de Dirac. Soit λ_j une suite strictement croissante de nombres réels positifs. Sous l'hypothèse $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geqslant \beta > 0$, Kahane et Mandelbrojt (1958) ont caractérisé les séries de Dirichlet $\sum_0^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ qui convergent dans un demi-plan $\Re s > s_0$ et dont la somme peut se prolonger en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pole en $s = 1$, et vérifiant le même type d'équation fonctionnelle que la fonction zêta de Riemann. Ces auteurs montrèrent qu'une mesure cristalline (en fait, un peigne de Dirac généralisé grâce au théorème de Nir Lev et d'Alexandre Olevskii) est toujours attachée à une telle série de Dirichlet. Cette même année Guinand construisait des mesures cristallines très différentes des peignes de Dirac. Puis le sujet fut abandonné pendant près de trente ans. La découverte des quasi-cristaux par Dan Shechtman en 1982 renouvela l'intérêt porté aux mesures cristallines. En premier lieu Lev et Olevskii observèrent que la preuve donnée par Guinand était incomplète et construisirent une mesure cristalline sur la droite réelle qui ne se réduise pas à un peigne de Dirac généralisé. Ensuite David Donoho et Philip Stark observèrent que l'étude des mesures cristallines peut être reliée au principe d'incertitude de Heisenberg en traitement du signal. Enfin Maryna Viazovska montra que les mesures cristallines sont présentes dans le problème suivant que nous désignerons sous le nom de *problème des restrictions*. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Une fonction f de la classe de Schwartz peut-elle être reconstruite en utilisant seulement sa restriction à Λ et la restriction de sa transformée de Fourier à F ? En résolvant le *problème des restrictions* Viazovska a, du même coup, trouvé, en dimension 8 et 24, la solution du problème de Kepler d'empilement optimal de boules d'un rayon donné. Une solution différente du *problème des restrictions* est fournie par un théorème remarquable dû à A. Bondarenko, D. Radchenko et K. Seip.

1. Freeman Dyson

Dans un essai intitulé *Birds and frogs*, Dyson (2009) conjecturait l'existence d'un lien entre les quasi-cristaux et l'hypothèse de Riemann :

> *Like every serious student of pure mathematics, when I was young I had dreams of proving the Riemann Hypothesis. I had some vague ideas that I thought might lead to a proof. In recent years, after the discovery of quasi-crystals, my ideas became a little less vague. I offer them here for the consideration of any young mathematician who has ambitions to win a Fields Medal. Quasi-crystals can exist in spaces of one, two, or three dimensions. From the point of view of physics, the three-dimensional quasi-crystals are the most interesting, since they inhabit our three-dimensional world and can be studied experimentally. From the point of view of a mathematician, one-dimensional quasi-crystals are much more interesting than two-dimensional or three-dimensional quasi-crystals because they exist in far greater variety. The mathematical definition of a quasi-crystal is as follows. a quasi-crystal is a distribution of discrete point masses whose Fourier transform is a distribution of discrete point frequencies. Or to say it more briefly, a quasi-crystal is a pure point distribution that has a pure point spectrum.*

En fait, Dyson n'avait pas complètement tort et nous verrons comment et pourquoi les *mesures cristallines* (et non les quasi-cristaux) sont liées à la fonction zêta de Riemann et à ses généralisations (séries L de Dirichlet, fonction zêta d'Epstein).

2. Définition des mesures cristallines

Quelques notations sont nécessaires. La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i\, y \cdot x) f(x)\, dx. \tag{1}$$

On désigne par $\mathscr{F}$ l'opérateur ainsi défini. Alors $\mathscr{F} : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme et, par dualité, $\mathscr{F}$ est également un automorphisme sur l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout

$R > 0$, l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leqslant R$ est fini. Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f.

Définition 2.1. Une mesure atomique μ sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure cristalline si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le support de μ est un ensemble localement fini,

(2) La mesure μ est une distribution tempérée,

(3) La transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ de μ est aussi une mesure atomique dont le support est un ensemble localement fini.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ on définit l'exponentielle imaginaire $\mathbf{w}_y$ par $\mathbf{w}_y(x) = \exp(2\pi i x \cdot y)$. Alors $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ et $\widehat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y)\delta_y$ impliquent

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda = \sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y \tag{2}$$

La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions. On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y$. La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ? Ce serait le cas si la mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ était presque périodique. Or il n'est pas vrai que toute mesure cristalline soit une mesure presque périodique. C'est cependant le cas pour la mesure cristalline μ construite par Kurasov et Sarnak (2020), mais pas pour sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$. Enfin il est probable que toute mesure cristalline soit une distribution presque périodique (Y. Meyer, 2017a ; Schwartz, 1950).

À chaque mesure cristalline μ est associée une variante de la formule sommatoire de Poisson. En effet, soit μ une mesure cristalline. Alors on a $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ et $\widehat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y)\delta_y$. Il en résulte que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\widehat{f}(\lambda) = \sum_{y \in F} a(y)f(y) \tag{3}$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit d'une nouvelle formule sommatoire de Poisson.

L'exemple le plus simple de mesure cristalline est le peigne de Dirac $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ pour lequel on a $\widehat{\mu} = \mu$ et donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)$ pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson usuelle. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un réseau et soit

$$\Gamma^* = \{y \in \mathbb{R}^n |\, \exp(2\pi i y \cdot x) = 1, \forall x \in \Gamma\} \tag{4}$$

le réseau dual. On a alors

$$c_\Gamma \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \sum_{y\in\Gamma^*} \widehat{f}(y) \tag{5}$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. La constante c_Γ est le volume d'une domaine fondamental pour le réseau Γ. Nous élargissons la définition des peignes de Dirac en y incluant, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout réseau Γ, les mesures atomiques de la forme $\sum_{\gamma\in\Gamma+x_0} \delta_\gamma$.

Définition 2.2. Soit $N \geqslant 1$ un entier et soit σ_j, $j = 1, \dots, N$, un peigne de Dirac dont le support est un réseau translaté $x_j + \Gamma_j \subset \mathbb{R}^n$. Soit $F_j \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini et soit $g_j(x) = \sum_{y\in F_j} c_j(y) \exp(2\pi i y \cdot x)$ une somme trigonométrique finie. Posons $\mu_j = g_j\,\sigma_j$. Alors $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_N$ est un peigne de Dirac généralisé.

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac généralisé est un peigne de Dirac généralisé. Existe-t-il d'autres mesures cristallines ? Kahane et Mandelbrojt (1958) ont abordé cette question tandis que Guinand (1959) proposait un exemple. Olevskii a attiré mon attention sur cet exemple en me signalant que Guinand n'en donnait pas une démonstration convaincante. La démonstration a pu être complétée grâce à l'aide de Philippe Michel (Y. Meyer, 2017b). Simultanément Lev et Olevskii (2016) construisaient une mesure cristalline qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé .

En outre, Lev et Olevskii ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Lev et Olevskii, 2015). *En dimension* 1 *si μ est une mesure cristalline, si le support Λ de μ et le support S de sa transformée de Fourier sont des ensembles uniformément discrets, alors μ est un peigne de Dirac généralisé.*

Rappelons qu'un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *uniformément discret* s'il existe un $r > 0$ tel que les boules de rayon r centrées en $\lambda \in \Lambda$ soient deux à deux disjointes. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *relativement dense* s'il existe un $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $|x - \lambda| \leqslant R$. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un *ensemble de Delone* s'il est uniformément discret et relativement dense. Les mesures cristallines étudiées dans Kahane et Mandelbrojt (1958) sont donc des peignes de Dirac généralisés. Lev et Olevskii ont étendu ce résultat en dimension $n \geqslant 2$ sous l'hypothèse que μ est une mesure positive. Le problème est toujours ouvert si μ est une mesure complexe arbitraire.

3. Mesures cristallines et fonctions zêta

L'utilisation de la formule sommatoire de Poisson dans la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta remonte à Riemann. En 1958 Titchmarsh, Kahane, Mandelbrojt et Guinand ont défini les mesures cristallines, ce qui leur permit d'étendre cette preuve à d'autres séries de Dirichlet. Plus précisément soit

$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ une mesure cristalline sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un exposant $s_0 > 0$ tel que

$$\sum_{\{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}} |c(\lambda)||\lambda|^{-s_0} \tag{6}$$

soit fini. La même condition est imposée à $\widehat{\mu}$. Ces deux conditions sont satisfaites dans tous les exemples connus de mesures cristallines. À une telle mesure cristalline μ on associe une fonction $\zeta(\mu, s)$ de la variable complexe s définie par $\zeta(\mu, s) = \sum_{\{\lambda \in \Lambda, \lambda \neq 0\}} c(\lambda)|\lambda|^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$. Cette fonction $\zeta(\mu, s)$ est évidemment analytique dans le demi plan ouvert défini par $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > s_0$. Si $n = 1$ et si μ est un peigne de Dirac on a $\zeta(\mu, s) = 2\zeta(s)$. Si μ est un peigne de Dirac sur un réseau, alors $\zeta(\mu, s)$ est la fonction zêta d'Epstein. Si χ est un caractère de Dirichlet, si $\chi(-1) = 1$, et si $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(k)\delta_k$, alors $\zeta(\mu, s) = 2L(s, \chi)$.

Théorème 3.1. *Soit $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ une mesure cristalline sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\widehat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y)\delta_y$ la transformée de Fourier de μ. Soit*

$$\xi(\mu, s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(\mu, s). \tag{7}$$

Alors

$$\xi(\mu, s) - \frac{2a(0)}{n - s} - \frac{2c(0)}{s} = E(\mu, s) \tag{8}$$

est une fonction entière. On a

$$\xi(\mu, s) = \xi(\widehat{\mu}, n - s). \tag{9}$$

Ce théorème appartient au folklore du sujet. La preuve est une transcription de la démonstration par Riemann de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta. Il résulte de (8) que $\zeta(\mu, s)$ est une fonction méromorphe dans le plan complexe avec éventuellement un pôle en $s = n$. L'application aux séries $L(s, \chi)$ de Dirichlet est frappante. Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de module N et $L(s, \chi) = \sum_1^\infty \chi(m)m^{-s}$. On suppose que $\chi(-1) = 1$ et l'on forme

$$\xi(s, \chi) = (N/\pi)^{s/2}\Gamma(s/2)L(s, \chi). \tag{10}$$

On pose $\tau(\chi) = \sum_1^N \chi(n)\exp(2\pi i n/N)$ et $\alpha(\chi) = \sqrt{N}/\tau(\chi)$. Alors on a

$$\xi(1 - s, \overline{\chi}) = \alpha(\chi)\xi(s, \chi). \tag{11}$$

Cette remarquable équation fonctionnelle découle du théorème 3.1. Pour le voir on pose $\sigma_\chi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \chi(k)\delta_k$. Cette mesure est un peigne de Dirac généralisé. On a $\zeta(\sigma_\chi, s) = 2L(s, \chi)$. En outre $\widehat{\sigma}_\chi = N^{-1}\tau(\chi)\sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\chi}(-m)\delta_{m/N}$ et l'on conclut en utilisant le théorème 3.1. Si χ n'est pas le caractère principal, $L(s, \chi)$ est une fonction entière dans le plan complexe. Si χ est le caractère principal, $L(s, \chi)$ est méromorphe avec un pôle en $s = 1$.