Séminaire BOURBAKI Juin 2022
73e année, 2021–2022, no 1195, p. 495 à 546
doi : 10.24033/ast.1196

LA CONJECTURE DU $K(\pi, 1)$ POUR LES GROUPES D'ARTIN AFFINES
[*d'après* Giovanni Paolini et Mario Salvetti]

par **Thomas Haettel**

Introduction

Les groupes de tresses ont été définis formellement par Artin (1925), et sont depuis un objet d'étude fascinant, grâce à leurs multiples définitions et connexions avec d'autres domaines (nous renvoyons le lecteur à Kassel et Turaev (2008) et Farb et Margalit (2012) pour des introductions aux groupes de tresses). L'une des manières de définir le groupe de tresses à n brins est de le voir comme le groupe fondamental de l'espace de configuration de n points du plan

$$Y = \{F \subset \mathbb{C}, |F| = n\}.$$

Ainsi, si on considère l'arrangement d'hyperplans $\{z_i = z_j\}_{i \neq j}$ dans $\mathbb{C}^n$, alors l'espace de configuration Y peut aussi s'interpréter comme le complémentaire de cet arrangement d'hyperplans

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\},$$

quotienté par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$.

Chaque tresse peut se représenter comme un lacet dans l'espace de configuration de n points du plan, c'est-à-dire comme n chemins dans le plan ne s'intersectant pas à chaque instant. En représentant le temps par exemple de haut en bas, on peut ainsi obtenir un dessin classique de tresse comme dans la figure 1.

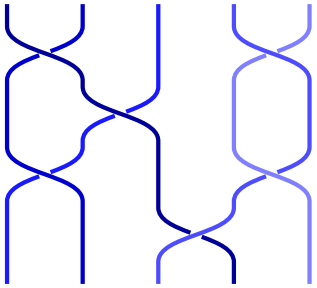

Figure 1 – Une représentation d'une tresse à cinq brins.

©Astérisque 438, SMF 2022

Si l'on considère un groupe de Coxeter W quelconque, il possède une action par réflexions sur un cône d'un espace vectoriel appelé cône de Tits (Bourbaki, 1968) généralisant l'action linéaire de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$. On peut lui associer un espace topologique Y_W correspondant au complémentaire de l'arrangement des hyperplans de réflexion. L'exemple le plus simple est donné par le cas d'un groupe de Coxeter affine W, agissant par réflexions sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, l'espace Y_W est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ de la réunion des complexifiés des hyperplans de réflexions, quotienté par W. L'espace Y_W est également appelé l'espace de configuration de type W, par analogie avec le cas des groupes de tresses.

Le groupe fondamental G_W de Y_W est appelé groupe d'Artin, ou groupe d'Artin–Tits, car il a été défini par Tits (1966). Il possède une présentation très simple, analogue à la présentation d'Artin des groupes de tresses (voir dans la partie 2). Cependant, hormis dans des cas très particuliers, la topologie de l'espace de configuration Y_W et les propriétés algébriques du groupe d'Artin G_W restent largement mystérieuses (Charney, 2016 ; Godelle et Paris, 2012 ; McCammond, 2017). Côté algébrique, on ne sait toujours pas si le groupe d'Artin G_W est sans torsion, on ne connaît pas son centre, et on ne sait pas résoudre le problème du mot. Côté topologique, la grande question ouverte concernant cet espace est la suivante :

Conjecture (Conjecture du $K(\pi, 1)$)**.** *L'espace de configuration Y_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_W.*

Rappelons que Y_W est un espace classifiant pour G_W si $\pi_1(Y_W) = G_W$ et si Y_W est asphérique, c'est-à-dire que pour tout $i \geqslant 2$, nous avons $\pi_i(Y_W) = 0$. Ceci est donc équivalent à la contractibilité du revêtement universel de Y_W. Cette question a été étudiée, essentiellement dans le cas où W est fini, par Arnol'd, Brieskorn, Deligne, Pham et Thom dans les années 1970 (Brieskorn, 1973 ; Deligne, 1972). L'énoncé général de la conjecture du $K(\pi, 1)$, pour un groupe de Coxeter quelconque, peut probablement être attribuée à Loojienga et à son élève en thèse van der Lek, qui a montré que le groupe fondamental de Y_W est bien le groupe d'Artin G_W (Lek, 1983). Nous renvoyons le lecteur à Paris (2014) pour une présentation moderne de cette conjecture. Remarquons que si la conjecture du $K(\pi, 1)$ est vraie, comme Y_W est asphérique et de dimension finie, cela implique que G_W est sans torsion, et cela implique également que le centre de G_W est connu (Jankiewicz et Schreve, 2021).

La conjecture du $K(\pi, 1)$ a été résolue pour les groupes d'Artin de type sphérique, c'est-à-dire ceux dont le groupe de Coxeter est fini, par Deligne (1972). Elle a par la suite été prouvée pour les groupes d'Artin affines de type $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{C}_n$ (Okonek, 1979), $\widetilde{B}_n$ (Callegaro, Moroni et Salvetti, 2010) et $\widetilde{G_2}$ (Charney et Davis, 1995b). Les travaux remarquables de Paolini et Salvetti apportent une réponse positive unifiée pour tous les groupes d'Artin affines :

Théorème (Paolini et Salvetti, 2021)**.** *La conjecture du $K(\pi, 1)$ est vraie pour tous les groupes d'Artin affines.*

En dehors des cas sphériques et affines, la conjecture du $K(\pi,1)$ a été prouvée pour les groupes d'Artin de dimension au plus 2 ou de type *FC* (Charney et Davis, 1995b ; Hendriks, 1985), ainsi que pour les groupes d'Artin relativement extra-larges (Juhász, 2018).

Remarquons que la stratégie de Deligne consiste à montrer que le revêtement universel de Y_W a le type d'homotopie d'un complexe simplicial, appelé complexe de Deligne, dont il montre qu'il est contractile (Deligne, 1972). Charney et Davis ont muni le complexe de Deligne d'une métrique CAT(0) dans certains cas, ce qui leur permet de montrer sa contractibilité (Charney et Davis, 1995b ; Hendriks, 1985). Cette stratégie de munir le complexe de Deligne d'une métrique à courbure négative est l'objet de plusieurs travaux récents (Boyd, Charney et Morris-Wright, 2020 ; Charney, 2004 ; Godelle, 2007 ; Goldman, 2021 ; Haettel, 2021 ; Morris-Wright, 2021).

On peut également poser la question de l'asphéricité du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans ne provenant pas d'un groupe de Coxeter, par exemple le complexifié d'un arrangement d'hyperplans réel quelconque, ou bien provenant d'un groupe de réflexions complexes. Il existe des arrangements d'hyperplans réels linéaires finis complexifiés dont le complémentaire n'est pas asphérique, voir par exemple (Falk, 1995). Cependant, pour les groupes de réflexions complexes finis, le complémentaire de l'arrangement est toujours asphérique (Bessis, 2015).

L'un des intérêts de la conjecture du $K(\pi,1)$ est qu'elle permet de calculer l'homologie et la cohomologie du groupe d'Artin G_W à partir de l'espace de configuration Y_W, ce qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux (Callegaro, Moroni et Salvetti, 2008 ; Callegaro et Salvetti, 2004 ; Charney et Davis, 1995a ; Cohen, 1973 ; De Concini et Salvetti, 2000 ; Paolini, 2019b ; Paolini et Salvetti, 2018 ; Salvetti, 1994).

Une des raisons fondamentales pour lesquelles les groupes de tresses, et plus généralement les groupes d'Artin de type sphérique, sont bien compris est la notion de structure de Garside. Informellement, un groupe est dit de Garside si l'on peut trouver un élément particulier dont les diviseurs engendrent le groupe et forment un treillis (Dehornoy, 2002 ; Dehornoy, Digne et al., 2015 ; Dehornoy et Paris, 1999 ; Garside, 1969). Un groupe de Garside a un problème du mot résoluble, et un espace classifiant combinatoire très simple.

Lorsque W est un groupe de Coxeter fini, on peut considérer le relevé naturel dans G_W de l'élément le plus long du groupe de Coxeter W : cela définit une structure de Garside, appelée structure standard.

Cependant, lorsque le groupe de Coxeter W est infini, il n'y a plus d'élément le plus long, et on ne connaît pas en général de structure de Garside pour G_W. En revanche, déjà pour les groupes d'Artin sphériques, il existe une autre structure de Garside appelée structure duale (Bessis, 2003 ; Birman, Ko et Lee, 1998). L'idée est

de considérer un élément de Coxeter à la place de l'élément le plus long de W. Cela revient, dans le cas du groupe de tresses à n brins, à considérer un $n^{\text{ème}}$ de tour à la place d'un demi-tour. En termes de générateurs, cela revient à considérer toutes les transpositions, et non pas seulement les transpositions entre brins adjacents, voir la partie 2.

Il s'avère qu'il existe également des structures de Garside duales pour des groupes d'Artin non sphériques : Digne (2006, 2012) a montré que pour certains groupes d'Artin affines, le relevé d'un élément de Coxeter définit une structure de Garside duale. Cependant, McCammond (2015) a montré que la propriété de treillis était fausse dans les autres cas.

Pour pallier ce manque, McCammond et Sulway (2017) ont montré qu'il était possible d'agrandir tout groupe d'Artin affine en un groupe appelé groupe cristallographique tressé, qui possède lui une structure de Garside duale. Ceci leur a permis de construire, pour tout groupe d'Artin affine, un espace classifiant de dimension finie, mais avec cependant un nombre infini de cellules. L'une des conséquences des travaux de Paolini et Salvetti est l'amélioration suivante :

Théorème (Paolini et Salvetti, 2021)**.** *Tout groupe d'Artin affine possède un espace classifiant fini.*

Nous allons donner un panorama de la preuve des résultats principaux de Paolini et Salvetti (2021), que nous détaillerons dans la suite du texte.

Fixons un groupe de Coxeter W et un élément de Coxeter w, c'est-à-dire un produit des générateurs standard dans un ordre arbitraire. À partir de l'intervalle $[1, w]$ des diviseurs de w, on peut définir le groupe d'Artin dual W_w associé à w (voir la partie 3). Lorsque W est fini ou affine, le groupe d'Artin dual W_w est isomorphe au groupe d'Artin G_w (Bessis, 2003 ; McCammond et Sulway, 2017), mais c'est une question ouverte en général. Lorsque l'intervalle $[1, w]$ est un treillis, le groupe d'Artin dual W_w est un groupe de Garside, et possède un espace classifiant explicite K_W, qui provient de la réalisation géométrique de cet ensemble ordonné $[1, w]$.

Le premier argument important est de montrer que, même si l'intervalle $[1, w]$ n'est pas un treillis, le complexe d'intervalle K_W reste un espace classifiant (infini) pour le groupe d'Artin dual W_w. Cette preuve repose sur les groupes cristallographiques tressés définis par McCammond et Sulway (2017), qui apparaissent comme produits amalgamés ayant pour facteur le groupe d'Artin G_W. Pour les définir, McCammond et Sulway ont étudié l'ensemble ordonné de toutes les isométries d'un espace euclidien, avec pour partie génératrice l'ensemble des réflexions. On renvoie aux parties 3, 5 et 6 pour les détails.

La suite de la preuve de la conjecture du $K(\pi,1)$ consiste à définir un sous-complexe X'_W de K_W qui aura le même type d'homotopie que l'espace de configuration Y_W. Pour cela, nous allons partir du complexe de Salvetti X_W (Paris, 2014; Salvetti, 1987), qui est un modèle combinatoire bien étudié de l'espace de configuration Y_W, et qui peut se décrire par recollement de sous-complexes correspondant à des sous-groupes paraboliques sphériques. La version duale de cette construction fournit un complexe de Salvetti dual X'_W, qui a le même type d'homotopie que le complexe de Salvetti standard X_W, et qui se réalise naturellement comme sous-complexe de K_W. Cette construction est détaillée dans la partie 4.

La fin de la preuve consiste à montrer que le complexe d'intervalle K_W se rétracte par déformation forte sur son sous-complexe X'_W. Tout d'abord, en étudiant l'action de l'élément de Coxeter w par conjugaison sur K_W, on peut définir un sous-complexe fini K'_W de K_W contenant X'_W, tel que K_W se rétracte sur K'_W. La preuve que K'_W se rétracte sur X'_W est plus technique, et repose notamment sur la construction d'un étiquetage lexicographique sur l'intervalle $[1,w]$. Ceci a pour conséquence intéressante que l'intervalle $[1,w]$, aussi appelé ensemble des partitions non croisées affines, est décortiquable. La preuve de l'existence des deux rétractions de K_W sur K'_W puis X'_W repose sur la théorie de Morse discrète, via la construction de couplages acycliques. Les détails sont donnés dans les parties 7, 8, 9 et 10.

Cette approche duale pour la conjecture du $K(\pi,1)$ est également présentée de manière synthétique dans (Paolini, 2021). En particulier, il est envisageable que cette stratégie puisse fournir une preuve de la conjecture du $K(\pi,1)$ pour d'autres groupes d'Artin : le cas des groupes d'Artin de rang 3 est annoncé dans (Paolini, 2021, Theorem 6.1).

Remerciements. — Nous souhaitons remercier chaleureusement Bérénice Delcroix-Oger, Clément Dupont, Hoel Queffelec, Giovanni Paolini et Luis Paris pour des discussions ayant aidé à la rédaction de ce texte. Nous remercions également Nicolas Bourbaki pour avoir contribué à améliorer ce texte.

1. Groupes de Coxeter et groupes d'Artin

Commençons par rappeler les définitions des groupes de Coxeter et d'Artin. Nous renvoyons le lecteur à (Bourbaki, 1968; Davis, 2015; Godelle et Paris, 2012; Humphreys, 1990; Paris, 2014) pour plus de détails.

Définition 1.1 (Matrice de Coxeter). Considérons un ensemble fini S, une *matrice de Coxeter* $(m_{st})_{s,t\in S}$ est une matrice symétrique telle que pour tout $s \in S$ nous ayons $m_{ss} = 1$, et pour tous $s,t \in S$ distincts nous ayons $m_{st} = m_{ts} \in \{2,3,4,\dots,\infty\}$.