Séminaire BOURBAKI Novembre 2002
55e année, 2002-2003, n$^{\mathrm{o}}$ 911, p. 63 à 75

EXEMPLES D'INSTABILITÉS POUR DES ÉQUATIONS D'ONDES NON LINÉAIRES [d'après G. Lebeau]

par **Guy MÉTIVIER**

1. INSTABILITÉ DES ÉQUATIONS D'ONDE SURCRITIQUES

Dans l'étude des équations hyperboliques non linéaires, l'équation d'onde

$$(1) \qquad (\partial_t^2 - \Delta_x)u + |u|^{p-1}u = 0\,, \quad u_{|t=0} = u_0\,, \quad \partial_t u_{|t=0} = u_1\,,$$

est un modèle de base pour l'analyse mathématique. On s'intéresse ici au cas de la dimension trois ($x \in \mathbb{R}^3$) et, pour simplifier, on se limite au cas où p est un entier impair ($|u|^{p-1}u = u^p$). En multipliant l'équation par $\partial_t u$ et en intégrant par parties, on voit que, formellement, on a conservation de l'énergie $E(u(t)) := \mathcal{E}\big(u(t), \partial_t u(t)\big)$ avec :

$$(2) \qquad \mathcal{E}(u_0, u_1) := \int_{\mathbb{R}^3} \Big(\frac{1}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2}|\nabla_x u_0|^2 + \frac{u_0^{p+1}}{p+1} \Big)\, dx\,.$$

L'existence et l'unicité de solutions fortes du problème de Cauchy est bien connue dans le cas sous-critique $p \leqslant 3$ et dans le cas critique $p = 5$ (voir par exemple [13], [16], [6], [4], [15], [11], [1]). En particulier, le semi-groupe solution $S_t : (u(0), \partial_t u(0)) \mapsto (u(t), \partial_t u(t))$ est uniformément lipschitzien sur les bornés de $\dot{H}^1 \times L^2$.

Dans le cas surcritique ($p \geqslant 7$), on dispose simplement d'un théorème d'existence et d'unicité *locales* des solutions régulières et, pour des données de Cauchy dans l'espace d'énergie, d'un théorème d'existence globale *sans unicité* de solutions faibles bornées dans l'espace d'énergie, *i.e.* vérifiant $E(u(t)) \leqslant \mathcal{E}(u_0, u_1)$. Un corollaire du travail de G. Lebeau [10] est que le problème de Cauchy (1) surcritique ($p \geqslant 7$) est mal posé au sens de Hadamard. Compte tenu du théorème local d'existence et d'unicité, l'obstacle vient de l'évolution des singularités. G. Lebeau considère le cas le plus simple d'une singularité ponctuelle (à l'origine) et de solutions radiales, c'est-à-dire invariantes par rotation. Un corollaire du résultat de G. Lebeau est le suivant :

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2004

Théorème 1.1. — *Si p est un entier impair supérieur ou égal à 7, il existe des familles de données initiales radiales $\underline{u}^\delta = (u_0^\delta, u_1^\delta)$ et $\underline{v}^\delta = (v_0^\delta, v_1^\delta)$, C^∞ en dehors de l'origine, d'énergie bornée par 1, dont la différence est asymptotiquement nulle dans l'espace des fonctions C^∞ plates à l'origine :*

$$\lim_{\delta\to 0} \big\| |x|^{-k}(\underline{u}^\delta - \underline{v}^\delta)\big\|_{H^s\times H^{s-1}} = 0\,, \qquad \forall\, k, s$$

telles que toutes les solutions faibles radiales u^δ, v^δ de (1) *(il en existe) vérifient*

$$\liminf_{\delta\to 0} \big\| u^\delta(t_\delta) - v^\delta(t_\delta)\big\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^3)} > 0\,, \tag{3}$$

où $t_\delta \to 0$ quand $\delta \to 0$.

Ce résultat d'instabilité montre que le problème de Cauchy (1) est mal posé au sens de Hadamard. En supposant que les opérateurs solutions S_t existent, pour tout $T>0$ arbitrairement petit, la famille $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ n'est pas équi-uniformément continue sur les boules de l'espace d'énergie.

Pour les solutions radiales, en dimension trois, on pose $u(t,x) = rg(t,r)$, avec $r = |x|$. L'équation s'écrit

$$(\partial_t^2 - \partial_r^2)g + \frac{g^p}{r^{p-1}} = 0\,, \quad g_{|t=0} = g_0\,, \quad \partial_t g_{|t=0} = g_1\,. \tag{4}$$

Pour cette équation, tous les p sont sous-critiques (en dehors de $r=0$) et par vitesse finie de propagation, pour des données initiales lisses dans $\{r>0\}$, on a existence, unicité et régularité de solutions faibles (radiales) dans $\{t<r\}$ (sous le cône d'onde).

G. Lebeau construit ses solutions u^δ à l'aide de solutions de (4) dont les données initiales g_0 et g_1 sont à support compact, de classe C^∞ en dehors de l'origine, et vérifient

$$g_0(r) \sim r^\gamma\big(c_0 + c_1 r^\beta + \dots\big)\,, \qquad g_1(r) \sim r^{\gamma-1-\beta}\big(d_0 + d_1 r^\beta + \dots\big)\,. \tag{5}$$

Les paramètres β et γ sont tels que :

$$\frac{p-2}{p+1} < \gamma < \frac{p-3}{p-1}\,, \quad \beta = \frac{p-3}{2} - \gamma\,\frac{p-1}{2} > 0\,. \tag{6}$$

Ce choix assure en particulier que l'énergie initiale

$$\mathcal{E}(g_0, g_1) := \int_0^\infty \Big(\frac{1}{2}|g_1|^2 + \frac{1}{2}|\partial_r g_0|^2 + \frac{g_0^{p+1}}{p+1}\Big)\, dr$$

est finie. Étant donné les deux suites de coefficients $(c_0, c_1, \dots)$ et $(d_0, d_1, \dots)$ avec $(c_0, d_0) \neq (0,0)$, l'idée de G. Lebeau est de construire et contrôler sur un cône $t \leqslant cr$ (avec $c<1$ petit) deux solutions g et g' associées à des données initiales (g_0, g_1) et (g_0', g_1') vérifiant toutes deux (5), mais qui diffèrent significativement sur une courbe $t = t(r) \ll r$. Plus précisément, on montre que

$$\int_{J_\delta} |(g-g')(t_\delta, r)|^{p+1}\,\frac{dr}{r^{p-1}} \geqslant c|J_\delta|\,\delta^{\gamma(p+1)-(p-1)}, \tag{7}$$

où J_δ est un certain intervalle centré en $\delta > 0$ et de longueur $\approx \delta^{2+\beta}/t_\delta \ll \delta$ et t_δ une suite tendant vers 0. On renvoie à [10] pour un énoncé précis.

Pour ce faire, on utilise un changement d'échelle. On introduit les nouvelles variables

$$t = \hbar s\,, \quad r = \hbar x \qquad g(t,r) = \hbar^\gamma f(s,x)\,. \tag{8}$$

Avec $h = \hbar^\beta$, l'équation devient

$$h^2(\partial_s^2 - \partial_x^2)f + \frac{f^{p+1}}{x^{p-1}} = 0 \quad f_{|s=0} = f_0\,, \quad \partial_s f_{|s=0} = f_1$$

et (5) devient

$$f_0(x) \sim x^\gamma \sum_{k\geqslant 0} h^k c_k x^{k\beta}\,, \qquad f_1(x) \sim x^{\gamma-1-\beta} \sum_{k\geqslant 0} h^k d_k x^{k\beta}$$

On se ramène alors à étudier des solutions de (9) dans un voisinage de $s = 0$, $x = 1$. Revenant à la notation habituelle t pour la variable de temps, on s'est donc ramené à étudier au voisinage de $t = 0$, $x = x_0 \neq 0$, un problème de la forme

$$h^2(\partial_t^2 - \partial_x^2)u + \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = 0 \quad u_{|t=0} = u_0\,, \quad \partial_t u_{|s=0} = u_1 \tag{9}$$

$$u_0(x) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k a_k(x)\,, \qquad u_1(x) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k b_k(x)\,, \tag{10}$$

avec $F(x,u) = u^{p+1}/(p+1)x^{p-1}$. L'objectif est de montrer l'instabilité du problème (9).

Théorème 1.2. — *Il existe une fonction $t(h)$ qui tend vers zéro avec h et des familles de données initiales $\underline{u}^h = (\underline{u}_0^h, \underline{u}_1^h)$ et $\underline{v}^h = (v_0^h, v_1^h)$ bornées dans C^∞ sur l'intervalle $\{|x - x_0| \leqslant r\}$, telles que les solutions u^δ, v^δ de* (9) *sont définies sur $\Omega = \{|x - x_0| + t \leqslant r,\ 0 \leqslant t \leqslant t(h)\}$ et vérifient*

$$\underline{u}^h - \underline{v}^h = O(h^\infty) \qquad \text{et} \qquad \big\|(u^h - v^h)_{|t=t(h)}\big\|_{L^2} \geqslant c\,. \tag{11}$$

2. UN PEU D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE FORTEMENT NON LINÉAIRE

Les résultats classiques sur le problème de Cauchy montrent que (9) possède une unique solution régulière sur un intervalle de longueur $\approx h$. L'objectif serait de construire des solutions sur les temps d'ordre $O(1)$. L'optique géométrique propose de chercher des solutions de la forme

$$u_h(t,x) = U\big(t, x, \frac{\varphi(t,x)}{h}\big)\,, \quad U(t,x,\theta) \sim \sum_{k\geqslant 0} h^k U_k(t,c,\theta), \tag{12}$$

où les $U_k(t,x,\theta)$ sont des fonctions régulières, 2π-périodiques en θ, et où la phase φ décrit les oscillations rapides dues au facteur $h^2\partial_t^2$ de l'équation. Comme il n'y a pas d'oscillations initiales on impose $\varphi(0,x)\equiv 0$.

Une littérature très abondante est consacrée aux calculs de développements de ce type pour des équations non linéaires et à leur justification (voir par exemple [17] [12], [8] et leur bibliographie). Le régime standard de l'optique géométrique dite *faiblement non linéaire* (*cf.* [7]) correspond à des solutions de la forme $u(t,x)=hU(t,x,\varphi/h)$ ou à des non linéarités de la forme $V(x)u+hF_1(x,u)$. Cette situation est maintenant bien comprise (*cf.* [8]). Dans le cas d'amplitudes supérieures ($u=h^\kappa U(t,x,\varphi/h)$, $\kappa<1$) la situation est plus délicate. L'existence de solutions formelles ne peut avoir lieu que sous certaines hypothèses de structure pour les équations (appelées *conditions de transparence* dans [9], et qui, pour les équations quasi-linéaires correspondent à des conditions de dégénérescence linéaire de la valeur propre, *cf.* [2]). Le point important est que les conditions d'existence de solutions BKW ne garantissent pas leur stabilité. En particulier, l'existence de solutions exactes ayant le développement formel trouvé n'est pas garantie (*cf.* [9], [2]). C'est exactement le phénomène observé par G. Lebeau pour les équations d'ondes (9). D'une part, il précise la construction de solutions formelles esquissée dans [17] et d'autre part il montre leur instabilité.

En reportant (12) dans (9), on obtient la suite d'équations

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_0 + F'_u(x,U_0)=0\,, \tag{13}$$

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_1 + F''_{u,u}(x,U_0)U_1 + T\partial_\theta U_0=0\,, \tag{14}$$

$$\sigma^2\partial_\theta^2 U_k + F''_{u,u}(x,U_0)U_k + T\partial_\theta U_{k-1} + \Box U_{k-2} + R_k(x,U_0,\dots,U_{k-1})=0\,. \tag{15}$$

avec $\Box=\partial_t^2-\partial_x^2$,

$$\sigma^2=(\partial_t\varphi)^2-(\partial_x\varphi)^2\,,\quad T:=2\varphi'_t\partial_t-2\varphi'_x\partial_x+\Box\varphi\,, \tag{16}$$

et R_k est une fonction lisse de ses arguments. On obtient de même les conditions initiales

$$U_k(0,x,0)=a_k(x)\,, \tag{17}$$

$$\varphi'_t(0,x)(\partial_\theta U_k)(0,x,0)+(\partial_t U_{k-1})(0,x,0)=b_k(x)\,. \tag{18}$$

(on a utilisé que $\varphi(0,x)=0$).

THÉORÈME 2.1. — *La suite d'équations* (13)–(18) *possède une unique solution formelle* (U,φ) *avec* $U=\sum h^k U_k$.

Pour la preuve, on renvoie à [10]. On esquisse ici le début de la construction, qui est la détermination de φ et U_0. La grande différence avec l'optique faiblement non linéaire est que l'équation « eikonale » pour φ est couplée à l'équation de transport pour U_0 (*cf.* aussi [14] dans le cas quasi linéaire).

1) Comme σ est indépendant de θ, l'équation (13) est une équation différentielle ordinaire en θ dépendant des paramètres σ et x. Pour σ et x fixés, les solutions dépendent de deux paramètres. Fixer la période élimine un paramètre. D'autre part, l'équation est invariante par translation en θ. Les solutions 2π-périodiques de (13) sont donc

$$U_0(t,x,\theta) = K\big(\sigma, x, \theta + \Theta(t,x)\big) \tag{19}$$

avec Θ une fonction déphasage arbitraire et $K(\sigma,x,\theta) = x\sigma^{2/(p-1)}G(\theta)$, où G est l'unique solution 2π-périodique de $G'' + G^p = 0$ vérifiant $G'(0) = 0$, $G(0) > 0$. Par ailleurs, les données initiales (17) (18) déterminent $\partial_t\varphi_{|t=0} = \sigma_{|t=0}$ et $\Theta_{|t=0}$.

Remarque 2.2. — Dans le cas linéaire (ou faiblement non linéaire) (*i.e.* $F'_u(x,U_0) = V(x)U_0$, avec $V > 0$), toutes les solutions de (13) (*i.e.* une famille à deux paramètres) ont la même période qui vaut 2π si φ vérifie l'équation eikonale $\sigma^2 = V$. Dans le cas fortement non linéaire, le paramétrage des solutions est radicalement différent : pour tout σ, il y a une famille à un paramètre de solutions de période fixée.

2) L'équation (14) est une équation différentielle linéaire en θ pour U_1 de la forme $\mathcal{L}U_1 = -T\partial_\theta U_0$ où $\mathcal{L}$ est le linéarisé de (13) en U_0. L'invariance par translation de (13) implique que $\mathcal{L}$ a un noyau. Plus précisément $\mathcal{L}$ est autoadjoint et a un noyau de dimension un engendré par $\partial_\theta K(\sigma,x,\cdot+\Theta)$. L'équation (14) admet donc une solution 2π-périodique si et seulement si le membre de droite

$$-T\partial_\theta U_0 = -(T + Z(\Theta)\partial_\theta)\partial_\theta K(\sigma,x,\cdot+\Theta)$$

est orthogonal au noyau. On a noté $Z = 2\varphi'_t\partial_t - 2\varphi'_x\partial_x$. Cela conduit à l'équation :

$$\int_0^{2\pi} \big(T\partial_\theta K + Z(\Theta)\partial_\theta^2 K\big)(\partial_\theta K)\, d\theta = 0$$

ou encore, en notant

$$J(t,x) := \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\partial_\theta K)^2 d\theta = \frac{1}{2}x^2\sigma^{4/(p-1)}\int_0^{2\pi} (\partial_\theta G(\theta))^2\, d\theta,$$

$$\partial_t\varphi\partial_t J - \partial_x\varphi\partial_x J + \Box\varphi J = 0\,. \tag{20}$$

Avec (16), on voit que φ est déterminée par les équations

$$\begin{cases} \partial_t q = \partial_x(\rho J) \\ \partial_t\rho = \partial_x(q/J) \end{cases}, \qquad \rho = \partial_x\varphi\,, \quad q = \partial_t\varphi J\,. \tag{21}$$

Comme on connaît $\varphi_{|t=0} = 0$ et $\partial_t\varphi_{|t=0}$ par l'étape 1, on voit que φ est maintenant bien déterminée.

Notant $\mathcal{L}_0$ l'opérateur $\mathcal{L}$ associé à $\Theta = 0$ et $\mathcal{L}_0^{-1}$ son inverse partiel sur $\ker \mathcal{L}_0^{\perp}$, on a donc $U_1(t,x,\theta) = V_1(t,x,\theta+\Theta(t,x))$ avec

$$V_1 = \lambda_1\partial_\theta K - \mathcal{L}_0^{-1}(T\partial_\theta K) - Z(\Theta)\mathcal{L}_0^{-1}(\partial_\theta^2 K) \tag{22}$$

et λ_1 une fonction arbitraire de (t,x).

Les conditions initiales (17) (18) avec $k = 1$ déterminent $\lambda_{1|t=0}$ et $\partial_t\Theta_{|t=0}$.