Séminaire BOURBAKI Novembre 2002
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 912, p. 77 à 95

LA CONJECTURE DES SOUFFLETS
[d'après I. Sabitov]

par **Jean-Marc SCHLENKER**

1. LES POLYÈDRES FLEXIBLES

1.1. Les polyèdres dans $\mathbf{R}^3$

On considère ici des polyèdres non nécessairement convexes dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on notera simplement $\mathbf{R}^3$. Un polyèdre sera donné sous la forme d'un complexe simplicial fini P_0 homéomorphe à une surface compacte orientable, muni d'une application $\phi : P_0 \to \mathbf{R}^3$ affine sur les triangles.

On dira que P est *plongé* lorsque l'application ϕ est injective, et qu'il est seulement *immergé* lorsque ϕ est injective au voisinage de chaque point.

Comme on a supposé P_0 orientable, un polyèdre délimite un domaine fermé borné de $\mathbf{R}^3$, qui n'est pas nécessairement connexe lorsque P_0 n'est pas plongé. On peut considérer son volume ; il sera toujours question ici du volume *algébrique*, c'est-à-dire que chaque composante connexe du complémentaire du polyèdre sera comptée avec un signe et éventuellement une multiplicité. Bien sûr, pour les polyèdres plongés, ces distinctions n'interviennent que pour le signe du volume.

1.2. Polyèdres flexibles et infinitésimalement flexibles

Aspects de la rigidité. — Étant donné un polyèdre P dans $\mathbf{R}^3$, on peut se demander s'il est rigide, c'est-à-dire si on peut le déformer sans changer la forme de ses faces (aux déplacements de $\mathbf{R}^3$ près). Cette question a en fait plusieurs versions principales distinctes :

– la *rigidité infinitésimale* : est-il possible de trouver un déplacement infinitésimal (*i.e.* au premier ordre) des sommets de P dans $\mathbf{R}^3$, qui ne change pas au premier ordre la longueur de ses arêtes — et donc, puisque les faces sont des triangles, qui ne change pas la forme de ses faces ? Bien entendu il faut se restreindre aux déformations qui ne sont pas triviales (*i.e.* qui ne proviennent pas d'un déplacement de P, ou en termes plus pédants d'un champ de Killing de $\mathbf{R}^3$ restreint aux sommets de P) ;

– la *flexibilité* : peut-on trouver une famille continue à un paramètre $(P_t)_{t\in[0,1]}$, avec $P_0 = P$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, P_t ait la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur ? Là encore on doit considérer des « flexions » non triviales, c'est-à-dire qui ne consistent pas simplement en un déplacement de P ;

– la *rigidité globale* : si P' est un polyèdre de $\mathbf{R}^3$ qui a la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur, P' est-il l'image de P par un déplacement ?

Ces propriétés sont en général distinctes, même si des relations existent entre elles. Elles existent d'ailleurs non seulement pour les polyèdres mais aussi pour les surfaces régulières. Par exemple, on ne sait toujours pas si les surfaces compactes régulières de $\mathbf{R}^3$ peuvent être flexibles (dans la classe des surfaces régulières).

Réalisabilité. — Une question reliée à la rigidité des polyèdres est la réalisabilité d'une métrique. Étant donné un polyèdre P_0, vu comme un objet combinatoire — un complexe simplicial fini homéomorphe à une surface compacte orientable — et étant donné, pour chaque arête de P_0, un nombre réel positif, on se demande s'il existe un polyèdre dans $\mathbf{R}^3$, de même combinatoire que P_0, et dont les longueurs des arêtes sont les nombres qu'on s'est donnés.

Pour les polyèdres convexes on dispose grâce à Aleksandrov [Ale58] d'une réponse partielle à cette question, et plus précisément d'une réponse complète à une question parallèle (voir plus bas). Dans le cas général, on sait très peu de choses, voir quand même [BZ95].

Rigidité d'ordre supérieur. — Il existe des notions de rigidité d'ordre supérieur, similaires à la rigidité infinitésimale. La définition même de ces notions est intéressante ; on renvoie le lecteur à [Con93, CS94], et à [Sab92] pour les questions analogues concernant les surfaces régulières.

Rigidité d'autres structures. — Les questions de rigidité ne se posent pas seulement pour les polyèdres, mais aussi pour d'autres structures qui modélisent plus précisément les problèmes appliqués où la rigidité intervient (mécanique, architecture, etc.). Voir par exemple [Con93, TW00, CW94].

1.3. Polyèdres convexes

Quand on se restreint aux polyèdres convexes, la situation se simplifie considérablement. Le premier résultat dans ce domaine résout la question de la rigidité globale des polyèdres convexes dans $\mathbf{R}^3$. Les polyèdres convexes qu'on considère ici sont des bords de corps convexes polyédraux dans $\mathbf{R}^3$.

THÉORÈME 1.1 (Legendre, Cauchy [Cau13]). — *Les polyèdres euclidiens convexes sont uniquement déterminés par leur combinatoire et la forme de leurs faces.*

Ce théorème est en général attribué à Cauchy. Pourtant, l'une au moins des idées principales de la preuve est due à Legendre [LegII], qui a démontré le théorème pour certaines classes de polyèdres. La contribution de Legendre est mal connue car elle se trouve seulement dans la première édition de ses *Éléments de géométrie*, mais n'a pas été reprise dans les éditions ultérieures. Elle a été « redécouverte » par Lebesgue, puis à nouveau récemment par Sabitov. Par ailleurs la preuve de Cauchy contenait deux petites erreurs corrigées respectivement par Steinitz [Ste16] et Lebesgue [Leb09].

Legendre ne prétend d'ailleurs pas à la paternité de l'énoncé ; il remarque en effet, suivant Robert Simson, que l'énoncé du théorème 1.1 se trouve de manière au moins implicite dans les *Éléments* d'Euclide (livre XI, définitions 9 et 10), mais sans démonstration.

Ce théorème a aussi une version infinitésimale, obtenue par M. Dehn. Elle peut être obtenue en utilisant les arguments de la preuve de Cauchy (mais la preuve de Dehn était différente).

Théorème 1.2 (Dehn [Deh16]). — *Les polyèdres euclidiens convexes sont infinitésimalement rigides.*

La preuve peut dans une certaine mesure être étendue à certains polyèdres non convexes, mais qui possèdent certaines propriétés des polyèdres convexes (voir [Sto68, RR00]).

De la rigidité à la réalisation des métriques. — Le résultat de rigidité de Cauchy est un élément fondamental dans un beau résultat d'Aleksandrov [Ale58], qui peut être considéré comme son extension naturelle. Pour l'énoncer, il faut d'abord parler de métriques à singularités coniques sur les surfaces.

Considérons un cône dans l'espace euclidien de dimension 3. Sa métrique induite est plate sauf en son sommet, où elle est singulière. En ce point, elle peut être obtenue en quotientant le revêtement universel de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ par une rotation d'angle θ autour de 0. L'angle θ est alors appelé angle total autour du point singulier, et $2\pi - \theta$ est la courbure singulière en ce point.

Une métrique plate à singularités coniques sur une surface est une métrique qui est plate, c'est-à-dire localement isométrique au plan euclidien, sauf en un nombre fini de points qui ont un voisinage isométrique à un voisinage d'un sommet d'un cône, comme on vient de les décrire.

Théorème 1.3 (Aleksandrov [Ale58]). — *Soit P un polyèdre euclidien convexe. La métrique induite sur son bord est une métrique plate sur S^2 à singularités coniques, et toutes les singularités sont à courbure singulière positive. Réciproquement, toute métrique de ce type est induite sur le bord d'un unique polyèdre euclidien convexe.*

Dans cet énoncé, l'unicité doit s'entendre aux isométries globales de $\mathbf{R}^3$ près. On est donc passé d'un résultat de *caractérisation* des polyèdres par leur combinatoire et la forme de leurs faces, à une *relation bijective* entre les polyèdres et certaines métriques sur la sphère.

Le résultat d'Aleksandrov est démontré d'une manière implicite. Pour chaque métrique à singularité conique à courbure positive sur la sphère, il énonce l'existence d'un polyèdre dont c'est la métrique induite — mais sans donner aucune indication sur la combinatoire de ce polyèdre.

Une question ouverte. — Il existe quand même quelques questions ouvertes concernant la rigidité infinitésimale des polyèdres euclidiens convexes. En particulier :

CONJECTURE 1.4 (Stoker [Sto68]). — *Soit P un polyèdre convexe. Si une déformation infinitésimale de P ne change pas, au premier ordre, ses angles dièdres, alors elle ne change pas non plus les angles intérieurs de ses faces.*

On peut aussi énoncer une version non infinitésimale de cette question : si deux polyèdres convexes ont la même combinatoire, et si leurs angles dièdres sont les mêmes, les angles intérieurs de leurs faces sont-ils identiques ? On trouvera aussi ci-dessous la version hyperbolique de cette conjecture, dont l'énoncé est plus simple encore.

1.4. Polyèdres flexibles

Les octaèdres flexibles. — Bricard [Bri97] a caractérisé tous les octaèdres euclidiens flexibles. Il a montré qu'il n'existe pas de tel octaèdre plongé ou même immergé, mais qu'il existe trois familles d'octaèdres — ayant des intersections entre leurs faces au voisinage de certains de leurs sommets — qui sont flexibles.

Les polyèdres « plongés » flexibles. — Au cours des années 1970, la question de la rigidité des polyèdres est revenue sur le devant de la scène. Le principal résultat a été la construction par R. Connelly [Con77, Kui79] d'un exemple de polyèdre flexible plongé dans $\mathbf{R}^3$.

Peu de temps après la découverte de Connelly, d'autres exemples plus simples ont été mis à jour ; le plus simple exemple connu à ce jour a été construit par K. Steffen, et il n'a que neuf sommets (il est décrit dans [Con79]). Le lecteur intéressé pourra trouver sur le web une multitude de pages décrivant ces exemples, parfois avec de belles images.

Ces exemples restent tout de même assez exceptionnels ; les polyèdres sont « génériquement » rigides, cela a été montré par H. Gluck [Glu75] quand le genre est 0, et dans [Sab02] pour un genre quelconque.

2. LE THÉORÈME DES SOUFFLETS

C'est le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1 (Sabitov [Sab96]). — *Soit P un polyèdre flexible dans $\mathbf{R}^3$. Lors d'une flexion de P, son volume ne change pas.*

Notons que cet énoncé ne s'applique pas aux déformations infinitésimales d'un polyèdre. Par exemple, si un polyèdre a un « faux » sommet s , dont un voisinage est contenu dans un plan p, il est facile de voir que les déformations infinitésimales obtenues en déplaçant s orthogonalement à p ne changent pas les longueurs des arêtes, tout en changeant le volume.

2.1. Historique ?

L'origine de cette conjecture n'est pas parfaitement établie. D'après une rumeur insistante, sa première vérification expérimentale aurait eu lieu, dans les années 1970, à l'I.H.É.S. grâce à un modèle de polyèdre flexible qui s'y trouve toujours, et qui est pourvu d'un trou dans l'une de ses faces. D. Sullivan y aurait soufflé la fumée de sa pipe avant d'actionner le polyèdre ; ne voyant pas de fumée sortir, il aurait conclu que le volume reste constant au cours de la déformation. La conjecture est en tous cas énoncée en détail dans l'exposé [Con80] de R. Connelly au Congrès International des Mathématiciens d'Helsinki en 1978, avec une référence à D. Sullivan.

2.2. Propriétés algébriques du volume

La formule de Héron. — Soit T un triangle euclidien, et soient a, b et c les longueurs de ses côtés. Une formule qui porte parfois le nom du mathématicien grec Héron exprime l'aire de T en fonction des longueurs des côtés : si $p = (a+b+c)/2$ est le demi-périmètre de T, alors son aire vérifie l'équation :

$$A^2 - p(p-a)(p-b)(p-c) = 0 \ .$$

Le lecteur intéressé devrait en trouver la preuve sans trop d'efforts.

Il existe une formule analogue qui donne le volume d'un simplexe de dimension trois en fonction de la longueur de ses arêtes. Elle était apparemment connue de Tartaglia, et probablement avant lui, et a été redécouverte en particulier par L. Euler. On ne l'énoncera pas ici car la formule de Cayley-Menger (voir plus bas) fournit une autre formule de ce type, conceptuellement plus simple.

Le théorème 2.2 ci-dessous peut être vu comme une extension de cette formule. Il assure que le volume de chaque polyèdre de $\mathbf{R}^3$ est racine d'une équation polynomiale dont les coefficients dépendent seulement (de manière polynomiale) des longueurs de ses arêtes.

Le volume des polyèdres comme racine. — Le théorème des Soufflets s'explique par le résultat plus fondamental suivant.

Théorème 2.2 (Sabitov). — *Soit P_0 un polyèdre (combinatoire) ayant e arêtes. Il existe des polynômes $c_0, c_1, \dots, c_n$ en e variables à coefficients entiers tels que, si P est un polyèdre de $\mathbf{R}^3$ combinatoirement équivalent à P_0 et dont les longueurs des arêtes sont $l_1, \dots, l_e$, alors* $12\mathrm{vol}(P)$ *est racine de :*

$$X^{2n} + c_1(l_1^2, \dots, l_e^2)X^{2n-2} + c_2(l_1^2, \dots, l_e^2)X^{2n-4} + \cdots + c_n(l_1^2, \dots, l_e^2) = 0 \ .$$