Séminaire BOURBAKI Novembre 2002
55e année, 2002-2003, nº 913, p. 97 à 124

NOUVELLES APPROCHES DE LA PROPRIÉTÉ (T) DE KAZHDAN

par **Alain VALETTE**

INTRODUCTION

La propriété (T) pour un groupe localement compact G est une forme de rigidité de G en théorie des représentations : il est impossible de déformer la représentation triviale de dimension 1 de G parmi les représentations unitaires de G. Elle a été dégagée en 1967 par D. Kazhdan [35], qui s'intéressait à des variétés riemanniennes M localement symétriques, irréductibles, de rang au moins 2, de volume fini. En d'autres termes, $M = \Gamma\backslash G/K$, où G est un groupe de Lie simple à centre fini, de rang réel $\geqslant 2$, K est un sous-groupe compact maximal de G, et Γ est un réseau sans torsion de G. Les principaux résultats de l'article de Kazhdan sont les suivants :

– Le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ est de type fini (quand M n'est pas compact, ce résultat est loin d'être trivial !).

– Le premier nombre de Betti $b_1(M) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{R})$ est nul.

Le principal mérite de Kazhdan est d'avoir vu que ces deux propriétés de M dépendent en fait de la structure des représentations unitaires du groupe de Lie G ambiant (voir les Théorèmes 1 et 2 ci-dessous pour les énoncés précis).

La propriété (T) a trouvé une série d'applications, qui vont de la théorie des graphes à la théorie ergodique (voir [30]). J'en isolerai une seule : le théorème de Margulis sur les sous-groupes normaux des réseaux Γ en rang $\geqslant 2$ (voir [38], Theorem 4.9) : un sous-groupe normal $N \triangleleft \Gamma$ est soit central dans G (et donc fini), soit d'indice fini dans Γ. Pour cela, on montre que, si N est infini, alors Γ/N est moyennable. Or Γ/N a aussi la propriété (T) (car Γ l'a), et un groupe dénombrable, qui est moyennable et a la propriété (T), est nécessairement fini[(1)]. À ma connaissance, toutes les preuves connues de ce résultat passent par la propriété (T).

[(1)] Pour la preuve, voir l'Exemple 1(2) de la section 1. Il est important que la preuve ne puisse pas être effective, puisque Γ est résiduellement fini, donc admet des quotients finis arbitrairement grands.

Le texte se présente comme suit : après un résumé de l'article original de Kazhdan [35] au chapitre 1, nous introduisons au chapitre 2 la caractérisation cohomologique de la propriété (T). Les résultats récents mentionnés dans ce texte sont quasiment tous des conséquences de la caractérisation cohomologique : actions par difféomorphismes du cercle (section 2.4 et Théorème 5), caractérisation de la propriété (T) par l'annulation de la 1-cohomologie *réduite* (section 3.1), lien avec les applications harmoniques et preuve de la propriété (T) pour $Sp(n,1)$ (section 3.2), non invariance de la propriété (T) par quasi-isométries (section 3.3), critère spectral pour la propriété (T) (chapitre 4).

La propriété (T) de Kazhdan a été exposée chez Bourbaki dans l'exposé 343 de Delaroche-Kirillov [15], et partiellement dans l'exposé 778 de Pansu [41]. Les progrès depuis 1993 ont été tels que j'ai dû me livrer à des choix : faute de temps ou faute de goût, j'ai choisi de ne pas parler du lien entre propriété (T) et génération bornée (Shalom [49]), de l'invariance par équivalence mesurée de la propriété (T) (Furman [20]), de l'industrie des constantes de Kazhdan (voir les références chez Gelander-Zuk [22]), ou des groupes aléatoires (Gromov [26], Zuk [56]) — ce dernier aspect devrait faire l'objet d'un prochain Séminaire Bourbaki par É. Ghys(2).

1. DÉFINITIONS ET EXEMPLES DE BASE

Soient G un groupe localement compact, et π une représentation unitaire, fortement continue, de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$.

Définition 1. — *La représentation* π possède presque des vecteurs invariants *si, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et toute partie compacte* $K \subset G$*, il existe un vecteur* $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ *tel que*

$$\max_{g\in K} \|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon\|\xi\|.$$

Exemple 1. — 1) Soit G un groupe compact. Toute représentation π de G qui possède presque des vecteurs invariants possède des vecteurs invariants non nuls. En effet, soit ξ un vecteur-unité de $\mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\max_{g\in G} \|\pi(g)\xi - \xi\| < 1.$$

Posons $\eta = \int_G \pi(g)\xi \, dg$, où dg désigne la mesure de Haar normalisée sur G. Le vecteur η est clairement invariant. Pour montrer qu'il est non nul, on remarque que $\|\eta - \xi\| = \| \int_G (\pi(g)\xi - \xi) dg\| < 1$. Comme $\|\xi\| = 1$, on a $\eta \neq 0$.

2) Notons λ_G la représentation régulière gauche du groupe localement compact G sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$. D'une part, on observe que λ_G a des vecteurs invariants non nuls si et seulement si G est compact. D'autre part, c'est un résultat classique de Hulanicki [33] et Reiter [45] que λ_G a presque des vecteurs invariants si et seulement si G est moyennable. Donc, si G est moyennable non compact (par exemple $G = \mathbb{Z}$),

(2) Voir en effet l'exposé 916, « Groupes aléatoires [d'après M. Gromov...] », par Étienne Ghys.

la représentation λ_G fournit un exemple de représentation ayant presque des vecteurs invariants, mais sans vecteur invariant non nul.

DÉFINITION 2. — *Un groupe localement compact G a* la propriété (T)*, ou est* un groupe de Kazhdan*, si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants, possède des vecteurs invariants non nuls.*

L'Exemple 1 montre d'une part que les groupes compacts ont trivialement la propriété (T), d'autre part que les groupes moyennables non compacts n'ont pas la propriété (T) (ceci a été évoqué dans l'introduction).

Les principales propriétés structurelles des groupes de Kazhdan sont rassemblées dans le résultat suivant, dû à Kazhdan [35] (voir aussi [15], [30]).

THÉORÈME 1. — *Soit G un groupe de Kazhdan.*

i) *G est compactement engendré.*

ii) *Le quotient $G/\overline{[G,G]}$ de G par l'adhérence du sous-groupe des commutateurs est compact.*

iii) *Si H est un sous-groupe fermé de co-volume fini dans G, alors H est un groupe de Kazhdan.*

En particulier, soit Γ un *réseau* dans G, c'est-à-dire un sous-groupe discret de covolume fini dans G. Si G a la propriété (T), le Théorème 1 implique que Γ, ainsi que tous ses sous-groupes d'indice fini, sont finiment engendrés avec un abélianisé fini.

Exemple 2. — Voyons comment cette remarque peut être exploitée pour montrer que certains groupes classiques n'ont *pas* la propriété (T). D'abord, le groupe libre $\mathbb{F}_n$ sur n générateurs ($n \geqslant 1$) n'a pas la propriété (T) car son abélianisé est infini. Ensuite, $SL_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété (T) car il contient un sous-groupe libre d'indice fini (noter que l'abélianisé de $SL_2(\mathbb{Z})$ est fini !). Enfin, $SL_2(\mathbb{R})$ n'a pas la propriété (T) car il contient $SL_2(\mathbb{Z})$ comme réseau.

Les principaux exemples de groupes de Kazhdan sont donnés par le résultat suivant, dû à Kazhdan [35] en rang $\geqslant 3$, et complété en rang 2 par Delaroche-Kirillov [15], Vaserstein [51], et Wang [53]. Un *corps local* est un corps commutatif localement compact non discret (penser à $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$ et aux corps de séries de Laurent sur les corps finis).

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathbb{K}$ un corps local. Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe, presque simple sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K}-\mathrm{rang}(\mathbb{G}) \geqslant 2$. Le groupe $G = \mathbb{G}(\mathbb{K})$ des $\mathbb{K}$-points de $\mathbb{G}$ possède la propriété (T).*

Exemple 3. — 1) Les groupes $SL_n(\mathbb{K})\,(n \geqslant 3)$ et $Sp_{2n}(\mathbb{K})\,(n \geqslant 2)$, ont la propriété (T).

2) Les groupes discrets $SL_n(\mathbb{Z})\,(n \geqslant 3)$ et $Sp_{2n}(\mathbb{Z})\,(n \geqslant 2)$, qui sont des réseaux respectivement dans $SL_n(\mathbb{R})$ et $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, ont la propriété (T).

Les Théorèmes 1 et 2 impliquent les propriétés des variétés riemanniennes localement symétriques qui ont été mentionnées dans l'introduction.

Le cas des groupes de rang 1 réserve une surprise : la situation n'est pas la même selon que le corps $\mathbb{K}$ est archimédien ou pas. Nous verrons au Corollaire 1 que toute action d'un groupe de Kazhdan sur un arbre possède un sommet fixe ou une arête fixe. Or, si $\mathbb{K}$ est un corps local non archimédien et $\mathbb{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe algébrique connexe, presque simple avec $\mathbb{K} - rang(G) = 1$, le groupe $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ agit proprement sur un arbre (à savoir son immeuble de Bruhat-Tits, voir [8]). Donc $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ n'a pas la propriété (T).

Considérons maintenant le cas archimédien. D'après la classification de Cartan (voir [32]), les groupes de Lie simples, connexes, de rang réel 1 sont localement isomorphes soit à $SO(n,1)$, soit à $SU(n,1)$, soit à $Sp(n,1)$ (avec chaque fois $n \geqslant 2$), soit enfin à $F_{4(-20)}$. Géométriquement, on réalise ces groupes comme groupes d'isométries des espaces hyperboliques de dimension n respectivement sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$, sur l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions de Hamilton, ou sur l'algèbre Cay des octaves de Cayley (avec $n = 2$ dans ce dernier cas). Le résultat suivant est dû à Kostant [36]. Nous esquisserons une preuve de la seconde moitié à la section 3.2.

Théorème 3. — *Soit G un groupe de Lie simple, connexe, de rang réel* 1.

i) *Si G est localement isomorphe à $SO(n,1)$ ou à $SU(n,1)$ ($n \geqslant 2$), alors G n'a pas la propriété (T).*

ii) *Si G est localement isomorphe à $Sp(n,1)$ ($n \geqslant 2$) ou à $F_{4(-20)}$, alors G a la propriété (T).*

Le groupe $Sp(n,1)$ et ses réseaux exhibent un curieux mélange de rigidité et de non rigidité. Certains caractères les rapprochent des groupes de rang supérieur (propriété (T), super-rigidité, voir [13], [27]). D'autres attributs les rattachent au rang 1 (hyperbolicité des réseaux co-compacts [25], non isolement de la représentation triviale parmi les représentations uniformément bornées, voir [14]).

Ces propriétés antagonistes ont été exploitées : construction d'une infinité non dénombrable de groupes de torsion non moyennables, par Gromov [25] ; construction de C^*-algèbres non équivalentes en K-théorie à des algèbres nucléaires, par Skandalis [50].

2. 1-COHOMOLOGIE ET ACTIONS AFFINES

2.1. Définitions

Soit π une représentation unitaire du groupe localement compact G.

Définition 3. — a) *L'espace des* 1-cocycles *à valeurs dans π est*

$$Z^1(G,\pi) = \{b : G \longrightarrow \mathcal{H}_\pi : \ b \text{ continu}, \ b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g) \, \forall \, g,h \in G\}.$$

b) *L'espace des* 1-cobords *à valeurs dans* π *est*

$$B^1(G,\pi) = \{b \in Z^1(G,\pi) : \exists \xi \in \mathcal{H}_\pi :\ b(g) = \pi(g)\xi - \xi,\, \forall\, g \in G\}.$$

c) *Le groupe de* 1-cohomologie *à coefficients dans* π *est le quotient*

$$H^1(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi).$$

d) *Munissons* $Z^1(G,\pi)$ *de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Le groupe de* 1-cohomologie réduite *à coefficients dans* π *est le quotient*

$$\overline{H^1}(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/\overline{B^1(G,\pi)},$$

où $\overline{B^1(G,\pi)}$ *désigne la fermeture de* $B^1(G,\pi)$.

Ces notions s'interprètent en termes d'actions isométriques affines de G sur $\mathcal{H}_\pi$.

– Si $b : G \to \mathcal{H}_\pi$ est une application continue, associons à $b(g)$ l'isométrie affine de $\mathcal{H}_\pi$:

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g) \quad (v \in \mathcal{H}_\pi).$$

L'application b est un 1-cocycle si et seulement si $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ pour tous $g, h \in G$, c'est-à-dire si α est une action isométrique affine de G, de partie linéaire π.

– Le 1-cocycle b est un 1-cobord si et seulement si l'action affine α possède un point fixe, c'est-à-dire si α est conjuguée à π par une translation. Le *lemme du centre* (voir [30]) dit qu'un cocycle b est un cobord si et seulement si b est borné comme fonction sur G.

– $H^1(G,\pi) = 0$ si et seulement si toute action isométrique affine de partie linéaire π possède un point fixe.

– $\overline{H^1}(G,\pi) = 0$ si et seulement si toute action isométrique affine de partie linéaire π possède presque des points fixes.

Les trois sections suivantes sont consacrées à des exemples où apparaissent naturellement des représentations ayant de la 1-cohomologie non nulle.

2.2. Représentations ayant presque des vecteurs invariants

Si π est une représentation unitaire de G, nous notons $\infty\pi$ la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de π.

PROPOSITION 1. — *Soit G un groupe localement compact σ-compact. Soit π une représentation de G, possédant presque des vecteurs invariants, mais pas de vecteur invariant non nul. Alors $H^1(G,\infty\pi) \neq 0$.*

Démonstration. — Soit $(K_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante de parties compactes, recouvrant G. Comme π possède presque des vecteurs invariants, on trouve une suite $(\xi)_{n\geqslant 1}$ de vecteurs de norme 1 dans $\mathcal{H}_\pi$ tels que

$$\max_{g\in K_n} \|\pi(g)\xi_n - \xi\| < 2^{-n}$$