Séminaire BOURBAKI Novembre 2004
57e année, 2004-2005, n$^{\text{o}}$ 941, p. 113 à 163

FORMES QUADRATIQUES ET CYCLES ALGÉBRIQUES
[d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...]

par **Bruno KAHN**

Table des matières

INTRODUCTION

La théorie algébrique des formes quadratiques (par opposition à la théorie arithmétique dans la lignée de Legendre, Gauss, Hermite, Minkowski, Hasse...) est l'étude des formes quadratiques sur un corps quelconque : l'article fondateur est celui de Witt ([70], 1937). Elle a connu un développement par à-coups, impulsé par des idées nouvelles et fondamentales introduites successivement par un petit nombre de mathématiciens. Il s'agit maintenant d'une théorie foisonnante, en pleine clarification, où cependant les méthodes les plus sophistiquées voisinent toujours de manière un peu mystérieuse avec les plus élémentaires, donnant parfois des démonstrations très différentes d'un même théorème.

Qu'est-ce que la théorie des formes quadratiques sur un corps F ? Sous un angle, il s'agit de l'étude des polynômes homogènes de degré 2. Le point de vue de Witt était qu'on peut munir ces polynômes d'une somme et d'un produit, en considérant la somme directe et le produit tensoriel des espaces vectoriels sous-jacents : on obtient ainsi l'anneau de Witt (ou plus exactement de Witt-Grothendieck) de F. La tentation de placer ainsi la théorie dans le contexte plus général de l'étude des formes de degré d est trompeuse : pour $d \geqslant 3$, la situation devient trop rigide et l'anneau obtenu est essentiellement inintéressant (*cf.* [20][(1)]).

D'un autre point de vue, la quadrique projective des zéros d'une forme quadratique q est un exemple de variété projective homogène (ici, sous l'action du groupe $SO(q)$) ; en particulier c'est une variété rationnelle. L'étude de l'isotropie de cette quadrique sur les extensions de F est centrale dans la théorie. Quoique d'autres variétés projectives homogènes soient naturellement attachées à des structures algébriques (par exemple les variétés de Severi-Brauer), il n'y a pas d'autre famille de telles variétés qui soit représentée par des structures algébriques qu'on puisse additionner et multiplier comme les formes quadratiques. Ceci donne sa richesse et sa spécificité à la théorie, qui se trouve naturellement au confluent de deux mondes (formes et variétés de drapeaux généralisées).

Pendant longtemps, cette théorie a pu passer pour une curiosité à mi-chemin entre l'« arithmétique des corps » et une géométrie algébrique relativement élémentaire. Elle est en train de trouver sa vraie place : d'une part elle intervient de manière essentielle dans la démonstration de la conjecture de Milnor par Voevodsky ([66], voir [30] pour un rapport dans ce Séminaire). D'autre part, elle est intrinsèquement présente dans la théorie homotopique des schémas de Morel-Voevodsky [49] : ce fait, anticipé par Rost, est illustré par le théorème fondamental de Morel (*cf.* [48, rem. 6.4.2]) selon lequel l'anneau des endomorphismes de l'objet unité de la catégorie homotopique stable des F-schémas n'est autre que l'anneau de Witt-Grothendieck de F, lorsque F est parfait de caractéristique $\neq 2$.

Par ailleurs, la théorie des formes quadratiques sur un schéma, qui était longtemps restée embryonnaire après le travail de fondements de Knebusch dans les années 1970, connaît depuis une dizaine d'années un développement spectaculaire grâce aux résultats de Balmer, Walter et d'autres, obtenus à l'aide des catégories triangulées à dualité [7, 8]. Ce n'est pas le lieu d'en parler ici, mais cela confirme que la théorie arrive à maturité.

(1) Par exemple, d'après un résultat remontant à Camille Jordan, si F est de caractéristique zéro, le groupe des automorphismes d'une telle forme est fini dès que l'hypersurface projective correspondante est lisse ; voir [56] pour une démonstration moderne et un peu plus générale.

Dans cet exposé, j'ai d'abord voulu offrir un survol de la théorie telle qu'elle s'est développée jusqu'au milieu des années 1990 : mal connue des non spécialistes, elle présente une élégance et une originalité qui, j'espère, séduiront certains lecteurs comme elles m'ont séduit moi-même. (Ne pouvant être exhaustif dans un tel exposé, je me suis néanmoins limité aux aspects directement liés aux derniers développements : ainsi, les travaux d'Elman-Lam ou ceux sur les corps ordonnés ne sont pas mentionnés.) Ensuite expliquer les développements de nature motivique (ou pour être plus terre à terre, faisant intervenir les correspondances algébriques) qui la révolutionnent depuis un peu moins de 10 ans, et les illustrer par des applications frappantes qui semblaient hors de portée avant l'apparition de ces méthodes.

J'ai essayé de donner un traitement aussi géométrique que possible de la théorie ; en particulier, chaque fois que cela a été possible je me suis efforcé de la placer dans le contexte plus général des variétés projectives homogènes (voir ci-dessus).

Ce rapport étant déjà excessivement long, j'ai été conduit à faire des choix cornéliens. En particulier, j'ai renoncé à exposer la partie de la théorie faisant intervenir les invariants supérieurs des formes quadratiques, c'est-à-dire la seconde conjecture de Milnor ([50] ; *cf.* [30, (2) à la fin de l'introduction]). On n'y trouvera que de brèves allusions ici ou là, voir notamment remarques 6.9 et 11.32. Un avantage de ce choix est que les résultats expliqués ici sont tous de démonstrations « élémentaires », n'utilisant pas la théorie homotopique des schémas.

Je remercie Yves André, Hélène Esnault, Detlev Hoffmann et Alexander Vishik pour leur aide dans la préparation de ce texte, ainsi que Nikita Karpenko, Jean-Pierre Serre et Tamás Szamuely pour diverses remarques le concernant. Je remercie également le CIMAT de Guanajuato, où il a été en partie conçu, pour son hospitalité et pour les excellentes conditions de travail dont j'ai bénéficié.

On travaille sur un corps F *de caractéristique* $\neq 2$. On note $\overline{F}$ une clôture séparable de F.

PARTIE I
FORMES QUADRATIQUES

1. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Une *forme quadratique* sur F est un espace vectoriel V muni d'une application $q : V \to F$ telle que $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ pour $(\lambda, x) \in F \times V$ et que $\check{q}(x,y) := \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$ (la *forme polaire* de q) soit bilinéaire : V est l'*espace sous-jacent* à q ; sa dimension est appelée la *dimension* de q, et notée $\dim q$. On a les notions classiques de vecteurs orthogonaux et d'orthogonal $X^\perp$ d'une partie X de V. On dit que q est *non dégénérée* si $V^\perp = \{0\}$.

À partir de maintenant, « forme quadratique » signifie forme quadratique de dimension finie, non dégénérée.

Un *morphisme* de (V,q) vers (V',q') est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $q' \circ f = q$: alors f est automatiquement injective et $f(V)$ est facteur direct orthogonal de V'. Si f est un isomorphisme, on dit que c'est une *isométrie*. On note $q \simeq q'$ s'il existe une isométrie entre q et q', et $q \leqslant q'$ s'il existe un morphisme de q vers q' (*i.e.* si q est isométrique à une sous-forme de q'). On note $O(q)$ le groupe des isométries d'une forme quadratique q : c'est le *groupe orthogonal* de q.

On dit aussi que deux formes q, q' sur F sont *semblables* s'il existe $a \in F^*$ tel que $q \simeq aq'$.

On peut additionner et multiplier les formes quadratiques :

– *Somme directe orthogonale* : $(V,q)\perp(V',q') = (V \oplus V', q\perp q')$, où $(q\perp q')(x,x') = q(x) + q'(x')$.

– *Produit tensoriel* : en termes de formes polaires, $(V,\check{q})\otimes(V',\check{q}') = (V\otimes V', \check{q}\otimes\check{q}')$, où $(\check{q}\otimes\check{q}')(x\otimes x', y\otimes y') = \check{q}(x,y)\check{q}'(x',y')$.

On peut aussi *étendre les scalaires* de F à une extension quelconque K de F : on notera $q \mapsto q_K$ cette opération.

Si (V,q) est une forme quadratique, par le choix d'une base (e_i) de V, q correspond à un polynôme $Q = \sum_i a_i T_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij} T_i T_j$, où $a_i = q(e_i)$ et $a_{i,j} = \check{q}(e_i, e_j)$. Si $\dim q \geqslant 3$, Q est irréductible et définit une hypersurface lisse $X_q \subset \mathbf{P}(V)$: la *quadrique* associée à q. On a $\dim X_q = \dim q - 2$. Si $\dim q = 2$, X_q n'est plus (géométriquement) irréductible, mais consiste en deux points rationnels ou un point quadratique de $\mathbf{P}(V)$. Deux quadriques X_q et $X_{q'}$ sont isomorphes si et seulement si q et q' sont semblables.

2. LA THÉORIE DE WITT

2.1. Base orthogonale et théorème de simplification

THÉORÈME 2.1

(a) *Toute forme quadratique q possède une base orthogonale.*

(b) *Soient q, q_1, q_2 trois formes quadratiques sur F. Si $q \perp q_1 \simeq q \perp q_2$, alors $q_1 \simeq q_2$.*

La partie (a) de ce théorème est bien connue et sa démonstration se perd dans la nuit des temps. La partie (b) (théorème de simplification) est essentiellement équivalente au fait que, si $\dim q = n$, tout élément de $O(q)$ est produit de n réflexions. Elle est couramment attribuée à Witt [70] ; toutefois, Scharlau [55, § 2][2] a fait observer

[2] Je remercie Serre de m'avoir indiqué cette référence.

qu'elle avait été obtenue 30 ans auparavant par Dickson [15] (très probablement sans que Witt en ait conscience).

Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthogonale de q et $x=\sum x_ie_i$, on a $q(x)=a_1x_1^2+\dots+a_nx_n^2$ avec $a_i=q(e_i)\in F^*$. On résume ceci par la notation $q\simeq\langle a_1,\dots,a_n\rangle$.

2.2. Indice de Witt

Soit q une forme quadratique d'espace vectoriel sous-jacent V. Un vecteur $x\in V$ est *isotrope* si $q(x)=0$. Un sous-espace $W\subset V$ est *totalement isotrope* si $q_{|W}=0$. La forme q est *isotrope* s'il existe un vecteur isotrope $\neq 0$, *anisotrope* si elle n'est pas isotrope.

On appelle *plan hyperbolique*, et on note $\mathbb{H}$, la forme quadratique de dimension 2, d'espace vectoriel sous-jacent F^2, définie par $q(x,y)=xy$ $((x,y)\in F^2)$. Pour tout $a\in F^*$, on a $\mathbb{H}\simeq\langle a,-a\rangle$; toute forme quadratique isotrope de dimension 2 est isométrique à $\mathbb{H}$. On dit qu'une forme h est *hyperbolique* si $h\simeq m\mathbb{H}=$ pour m convenable.

THÉORÈME 2.2. — *Toute forme quadratique q se décompose de manière unique (à isométrie près) en somme directe orthogonale $q_{\mathrm{an}}\perp h$, où q_{an} est anisotrope et h est hyperbolique.*

Ce théorème, dû à Witt [70], se déduit facilement du théorème 2.1. Il ramène dans une large mesure l'étude des formes quadratiques à celle des formes quadratiques anisotropes. On en déduit immédiatement que, si (V,q) est une forme quadratique, tous les sous-espaces totalement isotropes maximaux de V ont la même dimension : c'est l'*indice de Witt* de q, noté $i(q)$. Avec la notation du théorème 2.2, on a $i(q)=\frac{1}{2}\dim h\leqslant\frac{1}{2}\dim q$. La forme q est hyperbolique si et seulement si $i(q)=\frac{1}{2}\dim q$. Notons le lemme suivant, fort utile et qui donne une idée de l'esprit du sujet :

LEMME 2.3

(a) *Soient q,q' deux formes quadratiques anisotropes, et soit $n=i(q\perp -q')$. Alors il existe des formes quadratiques φ,q_1,q_1', avec $\dim\varphi=n$, telles que*

$$q\simeq\varphi\perp q_1,\qquad q'\simeq\varphi\perp q_1'.$$

(b) *Soient q une forme quadratique sur F et $q'\leqslant q$, de codimension r. Alors $i(q')\geqslant i(q)-r$. En particulier, si $\dim q'>\dim q-i(q)$, alors q' est isotrope.*

Voici une démonstration de (b) : soient V l'espace sous-jacent à q, W le sous-espace de V correspondant à q' et $H\subset V$ un sous-espace totalement isotrope de dimension $i(q)$. Alors $\operatorname{codim}_H(W\cap H)\leqslant r$.