**CLASSES DE COHOMOLOGIE POSITIVES DANS LES VARIÉTÉS
KÄHLÉRIENNES COMPACTES**

[d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell...]

par **Olivier DEBARRE**

1. INTRODUCTION

Soit X une variété⁽¹⁾ complexe compacte. On dit qu'une forme différentielle ω de type $(1, 1)$ sur X est définie positive si la forme hermitienne h définie par

$$h(x, y) = \omega(x, iy) - i\omega(x, y)$$

l'est, c'est-à-dire si elle définit une métrique hermitienne sur X . Lorsque ω est de plus fermée, on dit que h définit une métrique de Kähler sur X . La classe de cohomologie de Dolbeault de ω dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est dite classe de Kähler, et ces classes forment un premier cône⁽²⁾ convexe ouvert $\text{Kah}(X)$ dans l'espace vectoriel réel de dimension finie $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$. Si L est un fibré en droites holomorphe sur X , la courbure d'une métrique hermitienne sur L est une forme différentielle réelle fermée de type $(1, 1)$ dont un multiple représente la première classe de Chern de L . Pour que cette classe soit une classe de Kähler, il faut et il suffit que L soit *ample*.

Mais les éléments de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ sont aussi les classes des *courants* réels fermés de type $(1, 1)$ sur X , pour lesquels on a une notion similaire, mais plus faible, de positivité (*cf.* § 3.1). Les classes correspondantes forment un second cône convexe fermé, plus grand, dans $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$; on le note $\text{Pef}_{\text{tr}}(X)$. Lorsqu'on a affaire à la première classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe sur X , cette seconde notion de positivité correspond à la positivité du courant de courbure d'une métrique singulière sur L , ou encore, du point de vue algébrique, au fait que les puissances tensorielles positives de L ont « beaucoup » de sections holomorphes⁽³⁾.

⁽¹⁾Toutes nos variétés seront toujours, sauf mention explicite du contraire, supposées lisses et connexes.

⁽²⁾Un cône est une partie stable par multiplication par $\mathbf{R}^{+*}$.

⁽³⁾La positivité est en fait un peu plus faible que cette propriété. La différence entre les deux est essentielle et source de moult difficultés.

L'étude, lorsque X est une variété kählérienne compacte, de la géométrie de ces deux cônes est l'objet de cet exposé.

Les premières classes de Chern des fibrés en droites holomorphes sur X engendrent un sous-espace vectoriel de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$, qui peut être strict ; on le note $N^1(X, \mathbf{R})$. Ses éléments sont dits classes « algébriques ». Les traces de nos deux cônes sur $N^1(X, \mathbf{R})$ sont notées $\text{Amp}(X)$ (cône *ample*) et $\text{Pef}(X)$ (cône *pseudo-effectif*) respectivement. Lorsque X est projective, le cône dual de $\text{Amp}(X)$ dans l'espace vectoriel dual $N^1(X, \mathbf{R})^\vee$ est le cône fermé engendré par les classes de courbes algébriques de X , aussi dit « cône de Mori » de X , dont on sait qu'il reflète une grande partie de la géométrie de X .

Ces cônes ont été étudiés à l'aide de techniques de géométrie algébrique (qui ne donnent accès qu'aux classes algébriques, mais sont souvent aussi valables sur certaines variétés singulières) et, plus récemment, de techniques d'analyse complexe, qui permettent de traiter toutes les classes, mais sur les variétés lisses uniquement. Pour donner un exemple, on sait depuis longtemps caractériser de façon numérique (c'est-à-dire en termes de nombres d'intersection) les classes amples : c'est le célèbre critère de Nakai. Ce n'est que récemment que la caractérisation analogue des classes de Kähler sur les variétés kählériennes compactes (lisses) a été démontrée par Demailly et Păun (§ 2.4).

Un autre problème, de nature algébrique celui-ci, résolu récemment est la description du cône dual de $\text{Pef}(X)$ dans $N^1(X, \mathbf{R})^\vee$: Boucksom, Demailly, Păun et Peternell ont montré qu'il est engendré par les classes de courbes mobiles, c'est-à-dire dont les déformations recouvrent X (§ 4.2). La démonstration fait intervenir plusieurs constructions qu'il m'a paru utile de détailler.

La première est celle de « volume » d'une classe. Pour les classes algébriques, par exemple pour la première classe de Chern d'un fibré en droites L sur X , il s'agit essentiellement d'une mesure asymptotique de la dimension de l'espace des sections des puissances tensorielles positives de L (cf. § 5.1 et § 5.3 pour l'extension aux classes transcendentes). On définit ainsi une fonction continue $\text{vol} : H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^+$ dont la nature reste mystérieuse.

Le second ingrédient est la décomposition de Zariski. Celui-ci exprime, lorsque X est une *surface* algébrique, toute classe algébrique comme la somme d'une classe nef (limite d'amples) de même volume et d'une classe effective dite négative, orthogonale à la partie nef, dite positive (§ 5.2). Cette décomposition a des implications si importantes qu'on a longtemps – et vainement – tenté de l'étendre en dimension supérieure. Nakayama a montré que ce n'est pas possible, même si l'on permet des modifications.

On peut néanmoins montrer l'existence d'une décomposition « approchée » (th. 5.3 et 5.4) qui suffit pour démontrer la caractérisation du cône dual de $\text{Pef}(X)$ mentionnée plus haut. Il s'agit d'une décomposition *sur une modification de X* en la somme d'une

classe ample de volume proche et d'une classe effective, qui est alors automatiquement « presque orthogonale » (en un sens convenable) à la première.

Je termine en décrivant dans le § 7 une autre extension du résultat de Zariski en dimension supérieure, due à Nakayama pour les classes algébriques, puis à Boucksom en général : la décomposition de Zariski divisorielle. Il s'agit d'une décomposition en la somme d'une classe nef « en codimension 1 » de même volume et d'une classe « exceptionnelle ».

Les applications de ces résultats sont multiples. Même si de nombreux exemples montrent que la situation en dimension supérieure est infiniment plus compliquée que ce qui se passe sur les surfaces, Huybrechts et Boucksom ont montré, comme conséquence des résultats et techniques présentés ici, que tout se passe admirablement bien pour les variétés hyperkähleriennes (définies dans l'exemple 2.4), où une forme bilinéaire définie par Beauville et Bogomolov joue le rôle du produit d'intersection sur les surfaces. Nous expliquons leurs résultats sous forme d'une série d'exemples.

Voici une autre conséquence importante du théorème de dualité (cor. 4.3) : pour qu'une variété projective ne soit pas recouverte par des courbes rationnelles, il faut et il suffit que sa classe canonique soit dans l'adhérence du cône effectif. On s'attend alors à ce qu'un multiple de la classe canonique soit effectif. C'est peut-être le moment de parler de cette classe, qui est la grande absente de ces notes. Mori et Kawamata ont su montrer l'importance et la spécificité de cette classe et l'utiliser avec brio dans leurs théorèmes du cône et de rationalité. De nombreux exemples exhibent des classes pathologiques, mais on pense (ou on espère) que la classe canonique devrait se comporter raisonnablement. Beaucoup de travail reste à faire dans cette direction !

La littérature qui concerne les questions abordées ici étant en général bien écrite, il m'a paru inutile de la recopier (à deux exceptions près). J'ai préféré donner à ces notes la forme d'un survol, en présentant les deux points de vue, algébrique et analytique, l'un après l'autre, le tout assaisonné de nombreux exemples.

Je remercie pour leurs précieux conseils Arnaud Beauville, Sébastien Boucksom, Jean-Pierre Demailly, Daniel Huybrechts, Robert Lazarsfeld, Mihai Păun et Mihnea Popa.

Dans tout l'exposé, X est une variété complexe compacte de dimension n .

2. CÔNE AMPLE ET CÔNE DE KÄHLER

2.1. Quelques définitions

Soit L un fibré en droites sur X (toujours sous-entendu *holomorphe*); on note $H^0(X, L)$ l'espace vectoriel de ses sections holomorphes. Le fibré L est ample s'il existe un plongement de X dans un espace projectif $\mathbf{P}^N$ tel que $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N}(1)$ se restreint à X

en une puissance tensorielle positive de L . L'amplitude est une propriété numérique : elle ne dépend que de la première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbf{R})$ (cf. § 2.4).

Un *diviseur* sur X est une combinaison linéaire formelle $D = \sum_E t_E E$, à coefficients entiers, d'hypersurfaces analytiques irréductibles de X . Il est dit *effectif* lorsque tous les coefficients sont positifs; on écrit alors $D \geq 0$. Il est dit *premier* si une seule hypersurface irréductible apparaît dans D et qu'elle a coefficient 1; on confond alors souvent D avec cette hypersurface. On considérera aussi des $\mathbf{Q}$ -diviseurs (on permet des coefficients rationnels), et même des $\mathbf{R}$ -diviseurs. On note $[D]$ le diviseur obtenu en prenant la partie entière de ses coefficients, c'est-à-dire $\sum_E [t_E] E$; le *support* de D est la réunion des hypersurfaces irréductibles de X affectées d'un coefficient non nul dans D . Les composantes irréductibles d'un diviseur sont par définition celles de son support.

Toute fonction méromorphe f sur X a un diviseur (celui de ses pôles et zéros), noté $\text{div}(f)$; les diviseurs de ce type sont dits *principaux*. Deux diviseurs sont *linéairement équivalents* si leur différence est principale.

À tout diviseur D sur X , on associe un fibré en droites sur X , noté L_D , dont les sections sur un ouvert U de X sont les fonctions f méromorphes sur U dont le diviseur satisfait $\text{div}(f) + D|_U \geq 0$. Inversement, toute section méromorphe non nulle s d'un fibré en droites L a un diviseur D_s , et L est isomorphe à L_{D_s} . On dit que D est *ample* si L_D l'est. On notera aussi $H^0(X, D)$ au lieu de $H^0(X, L_D)$. Si D' est un autre diviseur, $L_{D'}$ est isomorphe à L_D si et seulement si D' est linéairement équivalent à D . L'ensemble $|D|$ des diviseurs linéairement équivalents à D s'identifie à l'espace projectif $\mathbf{P}(H^0(X, D))$.

Tout diviseur D a une classe de cohomologie $[D] \in H^2(X, \mathbf{R})$, et $c_1(L_D) = [D]$. Noter que l'addition des diviseurs se traduit par le produit tensoriel des fibrés en droites associés, et l'opposé par le dual.

On note ω_X le *fibré* (en droites) *canonique* sur X , c'est-à-dire le déterminant de son fibré cotangent, et K_X un *diviseur canonique*, c'est-à-dire vérifiant $L_{K_X} \simeq \omega_X$ (il n'est défini qu'à équivalence linéaire près).

2.2. Classes amples et classes de Kähler

Une métrique hermitienne h sur X est donnée dans des coordonnées locales $(z_1, \dots, z_n)$ sur X par

$$h = \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \otimes d\bar{z}_k,$$

où (h_{jk}) est une matrice hermitienne de fonctions locales sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbf{C}$, définie positive en chaque point. On lui associe la forme différentielle réelle $\omega = -\text{Im}(h)$, de type $(1, 1)$, donnée localement par

$$\omega = i \sum_{j,k} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Une forme de ce type est dite *définie positive*. On dit que la métrique h (ou la 2-forme ω) est une métrique *de Kähler* si ω est une forme différentielle *fermée*. S'il existe une telle métrique sur la variété X , celle-ci est dite *kählérienne*. Via la théorie de Hodge, toute forme de Kähler ω a une classe de cohomologie de de Rham⁽⁴⁾

$$[\omega] \in H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \subset H^2(X, \mathbf{R}).$$

L'ensemble des classes de (formes de) Kähler est un cône convexe ouvert

$$\text{Kah}(X) \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R}).$$

On fait maintenant intervenir la structure entière de $H^2(X, \mathbf{R})$. Le groupe abélien libre de type fini

$$N^1(X) = H^{1,1}(X, \mathbf{R}) \cap (\text{Im}(H^2(X, \mathbf{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{R})))$$

est appelé groupe de Néron–Severi de X . Le théorème de Hodge nous dit que c'est l'ensemble des premières classes de Chern des fibrés en droites sur X .

Si X est une sous-variété d'un espace projectif (on dit qu'elle est *projective*), la restriction à X de la forme de Fubini–Study est une forme de Kähler sur X dont la classe est entière, c'est-à-dire dans $N^1(X)$. Inversement, si $N^1(X)$ contient une classe de Kähler, le théorème de plongement de Kodaira entraîne que la variété X est projective (donc algébrique par le théorème de Chow). Plus précisément, si $N^1(X, \mathbf{R})$ est le sous-espace vectoriel réel de $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ engendré par $N^1(X)$, le cône

$$\text{Amp}(X) = \text{Kah}(X) \cap N^1(X, \mathbf{R})$$

est le cône engendré par les classes (de diviseurs) *amples* sur X .

2.3. Classes nef

Si X est projective, on montre que les éléments de $\overline{\text{Amp}}(X)$ sont les classes de fibrés en droites *numériquement effectifs* (ou nef) sur X , c'est-à-dire ceux dont le degré sur toute courbe est positif. Un fibré en droites nef L a des propriétés cohomologiques asymptotiques particulières : il vérifie le théorème de Fujita ([33], Theorem 1.4.40)

$$h^i(X, L^{\otimes m}) = O(m^{n-i}) \quad \text{pour tout } i \geq 0,$$

qui entraîne, avec le théorème de Riemann–Roch,

$$(1) \quad h^0(X, L^{\otimes m}) = \frac{c_1(L)^n}{n!} m^n + O(m^{n-1}).$$

⁽⁴⁾Une grande partie des constructions de cet exposé peuvent être faites sur une variété complexe compacte générale, pas nécessairement kählérienne, au prix de complications techniques. L'espace de cohomologie de Dolbeault $H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ est remplacé par

$$H_{\partial\bar{\partial}}^1(X, \mathbf{R}) = \{\text{formes de type } (1, 1) \text{ réelles } d\text{-fermées}\} / \{\text{formes de type } (1, 1) \text{ réelles } \partial\bar{\partial}\text{-exactes}\}.$$

Je renvoie à [6] et [8] les lecteurs intéressés.