

LA MESURE D'ÉQUILIBRE D'UN ENDOMORPHISME DE $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$
[d'après Briend et Duval]

par **Xavier BUFF**

INTRODUCTION

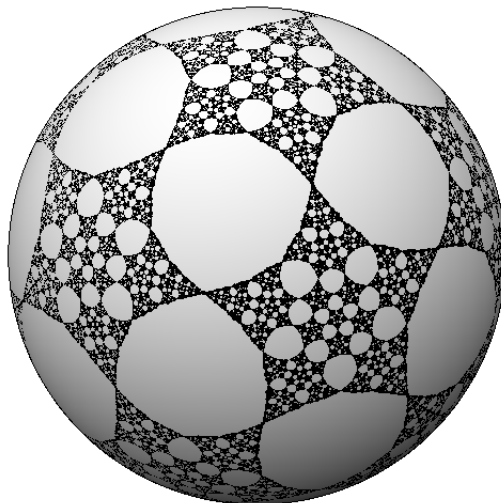
Un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Nous noterons $z = [z_0 : z_1 : \dots : z_k]$ un point $z \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ défini par ses coordonnées homogènes et $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ la projection canonique. Une application rationnelle $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique d est une application qui s'écrit $f = [F_0 : F_1 : \dots : F_k]$, les F_j étant des polynômes homogènes de degré d , sans facteurs communs. On associe à f l'application $F = (F_0, F_1, \dots, F_k) : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$. On a alors $\pi \circ F = f \circ \pi$. Une application rationnelle $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ n'est pas nécessairement définie partout. Son ensemble d'indétermination est $\pi(F^{-1}\{0\})$.

Les endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ sont les applications rationnelles non constantes dont l'ensemble d'indétermination est vide. Le degré algébrique d'une application rationnelle est aussi le degré de la préimage d'un hyperplan générique.

Dans tout cet exposé, nous nous intéressons aux propriétés dynamiques d'un endomorphisme holomorphe $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique $d \geq 2$. D'après le théorème de Bezout, son degré topologique, c'est-à-dire le nombre de préimages d'un point générique, est alors égal à d^k .

Remarque 0.1. — Nous ne parlerons pas des applications rationnelles dont l'ensemble d'indétermination n'est pas vide, par exemple les applications de Hénon. Le lecteur intéressé pourra consulter [25].

Le cas de la dimension $k = 1$ a une histoire assez ancienne, avec des contributions de Koenigs, Schröder, Böttcher à la fin du XIX^e siècle et les fameux mémoires de Fatou et Julia au début du XX^e siècle. L'ensemble de Fatou Ω_f est le plus grand ouvert sur lequel la famille des itérés de f est normale (pour la convergence uniforme sur tout compact). L'ensemble de Julia J_f est le complémentaire de Ω_f .

FIGURE 1. L'ensemble de Julia J_f de la fraction rationnelle

$$f : z \mapsto z \frac{z^{10} + 66z^5 - 11}{-11z^{10} - 66z^5 + 1}.$$

Le fait même que les ensembles de Fatou et de Julia soient définis à partir de la notion de famille normale reflète les origines de la dynamique holomorphe. Un ingrédient majeur dans les travaux de Fatou et de Julia est le théorème de Montel qui dit qu'une famille de fonctions holomorphes définies sur un ouvert de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et évitant 3 points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est une famille normale.

L'ensemble J_f est compact, parfait et complètement invariant par f :

$$f(J_f) = J_f \quad \text{et} \quad f^{-1}(J_f) = J_f.$$

Il se peut qu'il y ait un ensemble fini complètement invariant par f . Un tel ensemble contient au plus 2 points. Le plus grand s'appelle l'ensemble exceptionnel E_f . On peut donner des définitions équivalentes de l'ensemble de Julia J_f d'une fraction rationnelle $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

- J_f est le plus petit fermé complètement invariant contenant au moins 3 points ;
- J_f est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f (*i.e.* les points $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tels que $f^{\circ k}(z) = z$ et $|(f^{\circ k})'(z)| > 1$ pour un entier $k \geq 1$).

En 1965, Brolin [9] démontre que si f est un polynôme, il existe une mesure de probabilité invariante et mélangeante μ_f , supportée par l'ensemble de Julia J_f , qui reflète la distribution des préimages des points hors de l'ensemble exceptionnel E_f . L'outil central de la démonstration est la théorie du potentiel. La mesure μ_f peut être

obtenue comme le Laplacien d'une fonction de Green dynamique. Tortrat [26] montre que la mesure μ_f reflète également la distribution des points périodiques.

En 1983, Lyubich [21] et Freire-Lopès-Mañé [16, 22] généralisent ce résultat pour toute fraction rationnelle f . De plus, ils montrent que μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale de f .

Que reste-t-il de ces résultats en dimension $k \geq 2$?

Les définitions de l'ensemble de Fatou et de l'ensemble de Julia restent les mêmes. Mais en général, on ne peut plus caractériser l'ensemble de Julia comme le plus petit fermé invariant ou comme l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs.

En 1990, Sibony a l'idée d'introduire la théorie du potentiel dans l'étude de la dynamique des difféomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$. Pour un tel difféomorphisme, il définit une mesure de probabilité invariante. Avec Bedford [2] § 3, il établit les premières propriétés de cette mesure. Les résultats sont complétés par Bedford, Lyubich et Smillie [3, 1].

En 1994, Hubbard et Papadopol [19] définissent, pour un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, une mesure de probabilité invariante naturelle, la *mesure d'équilibre* μ_f , en utilisant la théorie du pluripotential. Fornæss et Sibony [12] montrent que la mesure d'équilibre μ_f est mélangeante et reflète la distribution des préimages des points en dehors d'un ensemble pluripolaire. En dimension $k \geq 2$, le support de la mesure est en général plus petit que l'ensemble de Julia (nous verrons un exemple plus loin).

En 2001, Briend et Duval [7] montrent que les méthodes de Lyubich s'adaptent en toute dimension avec des résultats similaires. Nous allons présenter ces travaux de Briend et Duval. Dans les énoncés suivants, f est un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ ($k \geq 1$) de degré algébrique $d \geq 2$.

THÉORÈME ET DÉFINITION 0.2. — *Les ensembles algébriques complètement invariants par f sont en nombre fini. L'ensemble exceptionnel E_f de f est le plus grand ensemble algébrique propre complètement invariant par f .*

Il est naturel de tirer en arrière des fonctions continues sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ et de pousser en avant des mesures sur $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$:

$$f^* \varphi = \varphi \circ f \quad \text{et} \quad \langle f_* \mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f^* \varphi \rangle = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \varphi \circ f \, d\mu.$$

Étant donné que $f : \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ est une application propre, elle a un degré topologique fini, à savoir d^k . La définition suivante a donc un sens :

$$\frac{1}{d^k} f_* \varphi = \frac{1}{d^k} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y),$$

les préimages de x étant comptées avec multiplicités. L'application $d^{-k}f_*\varphi$ obtenue en moyennant φ dans les fibres de f est alors une fonction continue (car on a pris en compte les multiplicités des préimages). On peut alors définir $d^{-k}f^*\mu$ par dualité :

$$\left\langle \frac{1}{d^k}f^*\mu, \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{P}^k(\mathbb{C})} \left(\frac{1}{d^k} \sum_{y \in f^{-1}(x)} \varphi(y) \right) d\mu(x),$$

les préimages de x étant comptées avec multiplicités. Par exemple, $\mu_{n,x} = d^{-kn}(f^{\circ n})^*\delta_x$ est la mesure de comptage normalisée sur $f^{-n}(x)$:

$$\mu_{n,x} = \frac{1}{d^{kn}} \sum_{y \in f^{-n}(x)} \delta_y.$$

THÉORÈME 0.3. — *La mesure d'équilibre μ_f est l'unique mesure de probabilité vérifiant $d^{-k}f^*\mu_f = \mu_f$ et ne chargeant pas l'ensemble exceptionnel E_f . De plus, pour toute mesure de probabilité ν ne chargeant pas E_f , on a $d^{-kn}(f^{\circ n})^*\nu \rightarrow \mu_f$. En particulier, $\mu_{n,x} \rightarrow \mu_f$ si et seulement si $x \in \mathbb{P}^k(\mathbb{C}) \setminus E_f$. La mesure μ_f est mélangeante, et donc ergodique.*

Nous rappellerons les notions d'entropie topologique et d'entropie métrique plus loin. Depuis 1977, on sait que l'entropie topologique d'un endomorphisme de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ de degré algébrique $d \geq 2$ est $k \log d$. La minoration est due à Misiurewicz et Przytycki [23] et la majoration est due à Gromov [17]. Comme la mesure d'équilibre μ_f est de jacobien constant d^k , la formule de Rohlin-Parry [24] dit que l'entropie métrique de μ_f vaut $k \log d$. Enfin, le principe variationnel affirme que l'entropie topologique est le supremum des entropies métriques. Donc, μ_f est une mesure d'entropie maximale.

THÉORÈME 0.4. — *La mesure d'équilibre est l'unique mesure d'entropie maximale de f .*

L'ensemble des points périodiques de période n contient $(d^{n(k+1)} - 1)/(d - 1)$ points, en comptant les multiplicités. Le théorème suivant montre que la majorité d'entre eux sont répulsifs et que la mesure d'équilibre reflète leur distribution asymptotique.

THÉORÈME 0.5. — *La suite de mesures*

$$\frac{1}{d^{nk}} \sum_{\substack{f^{\circ n}(y)=y \\ y \text{ répulsif}}} \delta_y$$

converge faiblement vers la mesure d'équilibre μ_f .

En dimension $k = 1$, tous les points périodiques, sauf au plus un nombre fini, sont répulsifs ; les points périodiques répulsifs sont dans l'ensemble de Julia qui est le support de μ_f . En dimension $k \geq 2$, Hubbard et Papadopol [19] (exemple 2, page 343)

montrent qu'il se peut que les points périodiques répulsifs ne soient pas dans le support de la mesure d'équilibre. Fornæss et Sibony [15] (théorème 4.3 et remarque 4.4) montrent également qu'il se peut qu'il y ait une infinité de tels points.

Antérieurement aux résultats que nous présentons ici, Briend et Duval [6] en avaient obtenu un autre que nous ne démontrerons pas.

THÉORÈME 0.6. — *Les exposants de Liapounoff de f relativement à μ sont minorés par $(\log d)/2$.*

Signalons [10] où Dinh et Sibony ont généralisé toute cette théorie au cas des applications d'allure polynomiale (qui contient le cas des endomorphismes de $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$). Ils donnent une construction directe de la mesure d'équilibre, n'utilisant que les fonctions plurisousharmoniques. Ils montrent que la mesure d'équilibre est K -mélangeante (ce qui est la notion la plus forte de mélange) et qu'elle est exponentiellement mélangeante.

Signalons également les travaux de Guedj [18] et de Dinh et Sibony [11] qui généralisent de nombreux résultats dans le cadre des transformations méromorphes (l'ensemble d'indétermination n'est pas vide).

1. DÉFINITION POTENTIALISTE DE LA MESURE D'ÉQUILIBRE

1.1. La mesure de Brolin pour les polynômes

Considérons d'abord le cas d'un polynôme $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de degré $d \geq 2$. Dans ce cas, on peut définir l'ensemble de Julia rempli

$$K_P = \{z \in \mathbb{C}; \text{ la suite } (P^{\circ n}(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}.$$

L'ensemble de Julia J_P est le bord de l'ensemble de Julia rempli K_P .

On peut alors définir une fonction $g_P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_P(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |P^{\circ n}(z)|,$$

où $\log^+ = \max(0, \log)$. Il est facile de voir que la limite existe et est uniforme en remarquant que la fonction $u(z) = \log^+ |P(z)| - d \log^+ |z|$ est bornée sur $\mathbb{C}$ et que

$$g_P(z) = \log^+ |z| + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{d^m} u(P^{\circ m}(z)).$$

La fonction g_P est continue et sousharmonique comme limite uniforme de fonctions continues et sousharmoniques. Elle s'annule sur K_P et est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus K_P$. Comme g_P est sousharmonique, son Laplacien est une mesure. En fait, $\mu_P = \frac{1}{2\pi} \Delta g_P$ est une mesure de probabilité de support égal à J_P .