**LEMME FONDAMENTAL ET ENDOSCOPIE,
UNE APPROCHE GÉOMÉTRIQUE**
[d'après Gérard Laumon et Ngô Bao Châu]

par **Jean-François DAT**

Malgré son nom, le « lemme fondamental » de Langlands et Shelstad est un énoncé conjectural, ou plutôt une famille d'énoncés conjecturaux. Il est de nature locale au sens arithmétique, *i.e.* il concerne des objets relatifs à un corps local, mais est apparu dans les deux problèmes majeurs, de nature globale, du fameux « programme de Langlands » : le principe de fonctorialité et l'expression des fonctions L de variétés de Shimura en termes automorphes. En effet, les méthodes initiées par Langlands pour chacun de ces problèmes reposent sur la formule des traces d'Arthur-Selberg : on cherche à comparer deux telles formules pour deux groupes différents dans le cas de la fonctorialité, ou bien une seule, pour un groupe donné, avec la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz pour sa variété de Shimura associée. Mais la formule des traces d'Arthur-Selberg n'est pas en général le bon outil pour appliquer cette méthode, elle est « instable » (*cf.* 1.3). Pour la stabiliser, Langlands [25], à la suite de travaux avec Labesse [24] et Shelstad, a créé la théorie d'endoscopie qui repose sur deux conjectures « locales », relevant de l'analyse harmonique sur les groupes p -adiques : le *transfert* et le *lemme fondamental*. Depuis vingt-cinq ans, beaucoup de mathématiciens ont été écrits, soit pour résoudre ces conjectures, soit pour aller au-delà, en les admettant.

Expliquons brièvement la nature de ces conjectures en renvoyant le lecteur à 1.6 pour un énoncé détaillé. Langlands et Shelstad ont défini la notion de groupe endoscopique d'un groupe p -adique G et pour un tel groupe, disons H , deux familles de distributions dépendant d'une classe de conjugaison « stable » γ semi-simple et « G -régulière » dans H : l'intégrale orbitale « stable » SO_γ sur H et l'intégrale orbitale « endoscopique » $O_\gamma^{G|H}$ sur G . La conjecture de *transfert* prévoit l'existence, pour chaque fonction lisse à support compact f_G sur G , d'une fonction semblable f_H sur H telle que $SO_\gamma(f_G) = O_\gamma^{G|H}(f_H)$ pour tout γ . Lorsque les groupes G et H sont quasi déployés et non-ramifiés, et donc munis de sous-groupes « hyperspéciaux » (*cf.* 1.1), le *lemme fondamental* prévoit, lui, que lorsque f_G est la fonction caractéristique d'un sous-groupe « hyperspécial » de G , alors on peut prendre pour f_H la fonction caractéristique d'un sous-groupe « hyperspécial » de H .

Waldspurger a introduit une variante du lemme fondamental où les intégrales orbitales sont prises sur les algèbres de Lie et non sur les groupes. Ses travaux [36] et [38] ont la conséquence remarquable suivante (*cf.* 1.7) : pour résoudre les conjectures de transfert de Langlands-Shelstad relatives à un groupe réductif G sur un corps p -adique, il suffit de savoir résoudre le lemme fondamental dans sa version « algèbres de Lie » pour toute forme quasi déployée non-ramifiée du système de racines absolu du centralisateur connexe d'un élément semi-simple de G , sur un corps $\mathbb{F}_{p^a}((T))$ avec p' « grand ».

Ce dernier problème a l'avantage de pouvoir être traduit en termes géométriques. En effet les distributions SO_γ et $O_\gamma^{G|H}$ sont des combinaisons linéaires d'intégrales orbitales ; dans le cas d'un groupe classique –associé à un espace vectoriel muni d'une forme symplectique, symétrique ou hermitienne– évaluer l'intégrale orbitale au point x de l'algèbre de Lie en la fonction caractéristique d'un compact hyperspécial revient à compter certains réseaux stables sous x et qui sont « autoduaux » pour la forme considérée. Lorsqu'on est sur un corps de séries formelles $F = k((T))$, les réseaux sont « classifiés » par la grassmannienne affine (une ind-variété sur k) et ceux qui sont stables sous x par la *fibres de Springer affine* telle que définie par Kazhdan et Lusztig dans [16]. Ainsi, Goresky, Kottwitz et Macpherson ont interprété dans [11] l'évaluation de SO_γ , resp. de $O_\gamma^{G|H}$, en la fonction caractéristique d'un compact hyperspécial de $\text{Lie}(H)$, resp. de $\text{Lie}(G)$, comme la trace alternée de Frobenius sur certains morceaux des groupes de cohomologie d'un quotient de la fibre de Springer affine de H en γ , resp. des groupes de cohomologie d'un système local « endoscopique » sur un quotient de la fibre de Springer affine de G en un élément $\gamma' \in \text{Lie}(G)$ associé à γ . Le problème est alors de comparer ces morceaux de groupes de cohomologie ! Les trois auteurs précédents ont résolu, modulo une conjecture de pureté cohomologique des fibres de Springer affines, le cas très particulier où le tore centralisateur de γ est non ramifié, et ont introduit un outil qui sera fondamental pour tous les travaux ultérieurs : la cohomologie équivariante sous un certain tore adapté à la situation. Laumon [28] a ensuite résolu le cas où G est un groupe unitaire, sans restriction sur γ mais toujours sous la conjecture de pureté, en introduisant de manière *ad hoc* un argument de déformation.

Ces approches géométriques sont de nature purement locales, et butent sur un obstacle, la conjecture de pureté, qui ne sera pas forcément facile à lever. Récemment, Ngô [33] a introduit une nouvelle approche géométrique, de nature globale, basée sur la fibration de Hitchin [15] introduite par ce dernier dans un tout autre contexte. Elle permet d'interpréter très naturellement le procédé de *pré-stabilisation* de Langlands-Kottwitz, *cf.* 1.4, qui est historiquement la motivation *globale* à l'origine du lemme fondamental. Elle fournit à la fois un moyen de contourner le problème de la pureté et de déformer de manière naturelle une situation locale donnée. Cette approche vaut *a priori* pour un groupe général, mais n'a pour l'instant été poussée jusqu'au bout, c'est-à-dire jusqu'à la preuve du lemme fondamental, que dans le cas des groupes unitaires

dans l'article [30] de Laumon et Ngô. Signalons enfin qu'elle utilise de manière cruciale le langage des champs algébriques.

Le but principal de l'exposé est de présenter l'approche de Laumon et Ngô. Cependant, comme l'énoncé du lemme fondamental n'a rien d'immédiatement « naturel », il a paru souhaitable de commencer par une présentation succincte de la théorie d'endoscopie et de ses motivations. On évoquera d'ailleurs autant la théorie globale que locale, puisque l'approche de Ngô est de nature globale.

L'auteur remercie P.-H. Chaudouard, J.-P. Labesse, G. Laumon et Ngô B.C. pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

1. ENDOSCOPIE : UNE BRÈVE INTRODUCTION

1.1. Notations

Nous aurons à considérer deux contextes différents, l'un global et l'autre local, pour lesquels certaines notations seront similaires.

Contexte local. — F est un corps local non-archimédien, donc soit $\mathbb{F}_q((T))$, soit une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ sur F est quasi-déployé et non-ramifié (*i.e.* déployé sur une extension non-ramifiée) si et seulement si $\mathbf{G}$ se prolonge en un groupe lisse à fibres réductives connexes sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_F$. Un sous-groupe *hypersécial* de $\mathbf{G}(F)$ est alors par définition un groupe de la forme $\mathbf{G}(\mathcal{O}_F)$ pour un tel prolongement. C'est un sous-groupe compact maximal du groupe localement compact $\mathbf{G}(F)$. Sous ces hypothèses, on normalisera toujours les mesures de Haar sur ce dernier de sorte que la mesure d'un sous-groupe hypersécial soit 1.

Contexte global. — F est un corps global, donc une extension finie de $\mathbb{Q}$ ou de $\mathbb{F}_q(T)$, dont on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers et $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des places. Pour toute place $v \in \mathcal{P}(F)$, on note F_v le complété en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau d'entiers. On note aussi $\mathbb{A}_F := \prod'_v F_v$ l'anneau topologique localement compact des adèles.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur F . On peut le prolonger en un groupe lisse à fibres réductives connexes sur $\mathcal{O}_F[\frac{1}{N}]$ pour un élément non-nul N de $\mathcal{O}_F$. On peut alors parler de $\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \in \mathcal{P}(F)$ ne divisant pas N . On définit $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ comme le produit restreint $\prod'_v \mathbf{G}(F_v)$ relativement aux $\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)$. C'est un groupe localement compact. On le munira de la mesure « canonique » de Tamagawa dont la définition précise n'a pas d'importance ici, et qui se décompose en un produit $dx = \prod'_v dx_v$ de mesures de Haar locales qui, aux places v ne divisant pas N , sont normalisées comme au paragraphe précédent (sauf éventuellement en une place si $N = 1$ et F est un corps de fonctions).

Rappelons que le plongement diagonal $\mathbf{G}(F) \hookrightarrow \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ fait de $\mathbf{G}(F)$ un sous-groupe discret de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ qui est de covolume fini si et seulement si le centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{G}$ est anisotrope, et qui est cocompact si et seulement si $\mathbf{G}$ lui-même est anisotrope.

Enfin nous fixerons une clôture séparable $\overline{F}$ de F et noterons Γ le groupe de Galois correspondant et Γ_v le groupe de décomposition en $v \in \mathcal{P}(F)$. Nous supposons toujours que la caractéristique de F est « assez grande pour $\mathbf{G}$ » (première à l'ordre de son groupe de Weyl en particulier) pour éviter les soucis d'inséparabilité.

1.2. Quelques mots sur la formule des traces

Le contexte ici est *global*. Supposons, pour simplifier, le centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{G}$ anisotrope sur F . Soit $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$ l'espace des fonctions complexes lisses à support compact sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$. De telles fonctions sont toujours de la forme $f_S \otimes (\otimes_{v \in \mathcal{P}(F) \setminus S} \mathbf{1}_{\mathbf{G}(\mathcal{O}_v)})$ pour un ensemble fini $S \subset \mathcal{P}(F)$ et une fonction $f_S \in \mathcal{C}_c^\infty(\prod_{v \in S} \mathbf{G}(F_v))$. Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$, la représentation ρ de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ sur l'espace $L^2(\mathbf{G}(F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F))$ et la mesure dx induisent un opérateur $\rho(f)$, intégral de noyau

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)} f(x^{-1}\gamma y).$$

Lorsque $\mathbf{G}$ est F -anisotrope, et donc $\mathbf{G}(F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ est compact, l'opérateur $\rho(f)$ est traçable et sa trace est l'intégrale de son noyau sur la diagonale. Un simple calcul fournit alors la « formule des traces » pour $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\rho(f)) &= \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}} \int_{\mathbf{G}_\gamma(F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma x) dx \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)/\mathrm{conj}} \mathrm{vol}_{dy}(\mathbf{G}_\gamma(F) \backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F)) \int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma x) dx/dy. \end{aligned}$$

Nous avons noté $\mathbf{G}_\gamma$ le (groupe algébrique) centralisateur de γ dans $\mathbf{G}$. Notons que l'extraction du volume à la seconde ligne permet d'utiliser des calculs locaux, puisque lorsque $f = \otimes_v f_v$, on a le produit (dont presque tous les facteurs sont égaux à 1)

$$\int_{\mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)} f(x^{-1}\gamma x) dx/dy = \prod_v \int_{\mathbf{G}_\gamma(F_v) \backslash \mathbf{G}(F_v)} f_v(x_v^{-1}\gamma x_v) dx_v/dy_v.$$

Le terme de gauche est l'*intégrale orbitale* globale de f sur la classe de conjugaison de γ , et sera encore noté $O_\gamma(f)$. De même, les intégrales orbitales locales du terme de droite seront notées $O_\gamma(f_v)$, $v \in \mathcal{P}(F)$. Enfin on posera $\tau(\mathbf{G}_\gamma) := \mathrm{vol}_{dy}(\mathbf{G}_\gamma(F) \backslash \mathbf{G}_\gamma(\mathbb{A}_F))$; de par nos conventions, c'est le nombre de Tamagawa de $\mathbf{G}_\gamma$, si celui-ci est connexe. Par la suite on supposera souvent $\mathbf{G}_{\mathrm{der}}$ simplement connexe, ce qui assurera la connexité des centralisateurs.

Lorsque $\mathbf{G}$ n'est plus supposé F -anisotrope, la formule des traces est beaucoup plus compliquée et n'est d'ailleurs pas une expression de la trace d'un opérateur. Il s'agit tout de même d'une égalité entre deux distributions sur $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$, l'une renfermant des informations spectrales, comme la trace sur le spectre automorphe discret, l'autre des informations « géométriques » comme les intégrales orbitales le long de classes

de conjugaison semi-simples de $\mathbf{G}(F)$. Un peu plus précisément, le côté géométrique s'écrit :

$$\sum_{\gamma \in \mathbf{G}(F)^{\text{ell}/\text{conj}}} \tau(\mathbf{G}_\gamma) O_\gamma(f) + \text{autres termes.}$$

Nous ne nous occuperons pas dans cet exposé des « autres termes », qui sont importants pour le but ultime mais qui pour certaines applications peuvent être annulés en choisissant bien la fonction-test f (cf. [19] par exemple). Puisqu'il faut définir l'ensemble $\mathbf{G}(F)^{\text{ell}}$ qui apparaît dans la sommation ci-dessus, on en profite pour introduire un peu de vocabulaire. Un élément $\gamma \in \mathbf{G}(F)$ est dit

- *régulier* si son centralisateur est de dimension minimale (égale au rang de $\mathbf{G}$).
- *fortement régulier* si ce centralisateur est un tore.
- *elliptique* s'il est contenu dans un F -tore F -anisotrope « modulo le centre » ⁽¹⁾.

Un tel tore sera lui-même dit « elliptique » par la suite.

Par exemple, lorsque $\mathbf{G} = GL(N)$, un élément de $\mathbf{G}(F)$ est semi-simple régulier et elliptique si et seulement si son polynôme caractéristique est irréductible. Les tores elliptiques de $GL(N)$ sont de la forme $\text{Res}_{F'|F} \mathbb{G}_m$ pour une extension séparable $F'|F$ de degré N . Si $\mathbf{G} = U_{E|F}(N)$ est le groupe unitaire (quasi déployé) associé à l'extension quadratique E de F , alors les tores elliptiques sont de la forme $\prod_{i=1}^r \text{Res}_{F_i|F} U_{E_i|F_i}(1)$ où les F_i sont des extensions séparables de F disjointes de E telles que $\sum_{i=1}^r \deg(F_i|F) = N$.

1.3. Pourquoi la stabilisation

Tentons d'expliquer brièvement l'origine des problèmes que nous allons présenter par la suite. La discussion qui suit est de nature informelle et contient des simplifications nécessairement abusives. Pour plus de détails et plus de rigueur, le lecteur pourra consulter [8] sur les formes et représentations automorphes et [7] sur les L -groupes et la fonctorialité.

Une représentation *automorphe* de $\mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ est par définition un sous-quotient irréductible de la représentation régulière de ce groupe dans un certain espace de fonctions sur $\mathbf{G}(F) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_F)$ qui sont dites aussi *automorphes* et qui généralisent la notion classique de forme modulaire que l'on a lorsque $\mathbf{G} = GL(2)$. De même que ces dernières, les formes automorphes recèlent des propriétés arithmétiques cachées et très intéressantes. Notons qu'une représentation automorphe se décompose de manière essentiellement unique en un produit tensoriel « restreint » $\Pi = \bigotimes'_v \pi_v$ de représentations irréductibles des groupes locaux $\mathbf{G}(F_v)$.

Le principe de fonctorialité que Langlands a imaginé en 1967 permet de transférer ces représentations d'un groupe à un autre. À $\mathbf{G}$ réductif connexe sur F on associe un groupe algébrique complexe ${}^L\mathbf{G} := \widehat{\mathbf{G}} \rtimes \Gamma$ où $\widehat{\mathbf{G}}$ est « le » groupe réductif connexe sur $\mathbb{C}$ de système de racines basé *dual* de celui de $\mathbf{G}$, et Γ agit par automorphismes

⁽¹⁾Avec cette définition, un élément elliptique est en particulier semi-simple.