

quatrième série - tome 56 fascicule 2 mars-avril 2023

*ANNALES
SCIENTIFIQUES
de
L'ÉCOLE
NORMALE
SUPÉRIEURE*

Aurélien DJAMENT & Antoine TOUZÉ & Christine VESPA

Décompositions à la Steinberg sur une catégorie additive

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Responsable du comité de rédaction / *Editor-in-chief*

YVES DE CORNULIER

Publication fondée en 1864 par Louis Pasteur

Continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par C. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
de 1918 à 1941 par É. PICARD
de 1942 à 1967 par P. MONTEL

Comité de rédaction au 1^{er} octobre 2021

S. CANTAT	G. GIACOMIN
G. CARRON	D. HÄFNER
Y. CORNULIER	D. HARARI
F. DÉGLISE	C. IMBERT
A. DUCROS	S. MOREL
B. FAYAD	P. SHAN

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
Email : annaes@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64. Fax : (33) 04 91 41 17 51
Email : abonnements@smf.emath.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 459 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 646 €. Hors Europe : 730 € (\$ 985). Vente au numéro : 77 €.

© 2023 Société Mathématique de France, Paris

En application de la loi du 1^{er} juillet 1992, il est interdit de reproduire, même partiellement, la présente publication sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

All rights reserved. No part of this publication may be translated, reproduced, stored in a retrieval system or transmitted in any form or by any other means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without prior permission of the publisher.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Fabien Durand
Périodicité : 6 n^{os} / an

DÉCOMPOSITIONS À LA STEINBERG SUR UNE CATÉGORIE ADDITIVE

PAR AURÉLIEN DJAMENT, ANTOINE TOUZÉ ET CHRISTINE VESPA

RÉSUMÉ. — Nous donnons une description des foncteurs simples à valeurs de dimensions finies allant d’une petite catégorie additive dans la catégorie des espaces vectoriels sur un corps assez gros (par exemple algébriquement clos). Cette description est analogue à des théorèmes de décomposition tensorielle de Steinberg en théorie des représentations des groupes. Nos résultats reposent sur la notion de foncteur polynomial introduite par Eilenberg et MacLane. Nous en donnons des applications aux représentations des groupes linéaires et aux propriétés de finitude des catégories de foncteurs.

ABSTRACT. — We give a description of simple functors taking finite-dimensional values, from a small additive category to the category of vector spaces over a field which is big enough (for example algebraically closed). This description is analogous to Steinberg’s tensor product theorems in group representation theory. Our results are based on the notion of polynomial functor introduced by Eilenberg and MacLane. We give applications to representations of general linear groups and to finiteness properties of functor categories.

Introduction

Représentations des petites catégories. — Pour $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite et K un corps commutatif, on considère la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers les K -espaces vectoriels. Cette catégorie abélienne est analogue à celle des représentations K -linéaires d’un groupe ou, plus généralement, d’un monoïde (correspondant au cas d’une catégorie $\mathcal{C}$ à un seul objet), si bien qu’elle est également appelée catégorie des représentations K -linéaires de $\mathcal{C}$.

En topologie algébrique, les foncteurs entre catégories de modules sont notamment reliés aux modules sur l’algèbre de Steenrod [29, 34, 35, 36], à l’homologie de Hochschild topologique (THH) [45] ou à l’homologie stable des groupes [22, 5, 17, 15]. En théorie des représentations, les foncteurs *additifs* d’une catégorie additive vers une catégorie abélienne sont depuis longtemps utilisés de façon systématique. Ils apparaissent par exemple dans l’étude des représentations indécomposables des algèbres de dimension finie, comme dans les travaux d’Auslander [2, 3] ou de Gabriel [26], ou dans l’étude des propriétés de pureté pour les

modules sur des anneaux généraux [33]. Plus récemment, l'étude de la catégorie $\mathcal{F}(\mathbf{FI}; K)$, où $\mathbf{FI}$ est la catégorie des ensembles finis avec injections, liée aux représentations des groupes symétriques, s'est avérée fructueuse – voir par exemple [11, 20].

Ainsi, il existe de profondes interactions entre la théorie des représentations des groupes ou des monoïdes et celle des petites catégories. Une question centrale dans l'étude de la catégorie $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ est la suivante :

PROBLÈME 1. – *Comment décrire les objets simples de la catégorie abélienne $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$?*

L'objectif premier de cet article est de répondre à cette question pour une catégorie source *additive*, par exemple, la catégorie $\mathbf{P}(A)$ des modules à gauche projectifs de type fini sur un anneau A .

La proposition 7 ci-après (page 432) rappelle les liens étroits existant entre foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ et représentations K -linéaires simples des groupes d'automorphismes des objets de $\mathcal{C}$, lorsque les ensembles de morphismes entre deux objets donnés de $\mathcal{C}$ sont *finis*. En l'absence d'hypothèse de finitude, de grandes difficultés structurelles, liées à des phénomènes sauvages, apparaissent pour les représentations des petites catégories, comme pour celles des groupes ou des monoïdes. Ainsi, la grande majorité de cet article ne concerne que des foncteurs de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ dont les valeurs sont des K -espaces vectoriels *de dimensions finies*. Nous noterons $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$ la sous-catégorie pleine de ces foncteurs. Lorsque les ensembles de morphismes sont finis dans $\mathcal{C}$, tous les foncteurs simples (ou, plus généralement, de type fini) de $\mathcal{F}(\mathcal{C}; K)$ appartiennent à $\mathcal{F}^{\text{df}}(\mathcal{C}; K)$, mais c'est loin d'être le cas en général.

Dans toute la suite de l'introduction, $\mathcal{A}$ désigne une catégorie additive essentiellement petite et K un corps commutatif, algébriquement clos. Cette dernière hypothèse sur K est souvent affaiblie pour les résultats donnés dans le corps de l'article, mais elle permet de simplifier plusieurs énoncés de cette introduction.

Nos deux résultats principaux sur la structure des foncteurs simples de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ sont des théorèmes de décomposition tensorielle. Ils constituent des analogues de décompositions tensorielles établies par R. Steinberg, dont nous rappelons maintenant les énoncés.

Deux théorèmes classiques de décomposition tensorielle. – Dans [56], Steinberg démontre qu'une représentation complexe M de dimension finie de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ ($n \geq 3$) est simple si et seulement si elle se décompose sous la forme :

$$(1) \quad M \simeq S \otimes T$$

où S est une représentation simple factorisant par un quotient fini $\text{SL}_n(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ de $\text{SL}_n(\mathbb{Z})$ et T est une représentation polynomiale simple. Une telle décomposition tensorielle est alors unique. Des cas particuliers de cette décomposition tensorielle avaient été obtenus préalablement par Bass-Milnor-Serre [4] et Serre [50]; les théorèmes de super-rigidité de Margulis [40, chap. VII, § 5] donnent des résultats nettement plus généraux en ce sens, à l'aide de méthodes beaucoup plus complexes.

Un autre théorème dû à Steinberg [55] concerne les groupes de Chevalley $G(\mathbb{F}_q)$ comme $\text{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ou $\text{SL}_n(\mathbb{F}_q)$, où $q = p^r$ avec p premier. Plus précisément, si K contient $\mathbb{F}_q$, une

représentation K -linéaire M de $G(\mathbb{F}_q)$ est simple si et seulement si elle se décompose comme un produit tensoriel

$$(2) \quad M \simeq M_0^{\{0\}} \otimes M_1^{\{1\}} \otimes \cdots \otimes M_{r-1}^{\{r-1\}},$$

où les M_i sont des représentations simples p -restreintes du groupe algébrique $G(K)$, et l'exposant $\{i\}$ indique que l'on a restreint la représentation M_i le long du morphisme de groupes $G(\mathbb{F}_q) \rightarrow G(K)$ induit par le plongement $\mathbb{F}_q \rightarrow K, x \mapsto x^{p^i}$. Dans le cas de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ les représentations M_i sont uniquement déterminées, dans celui de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ elles sont uniquement déterminées à tensorisation par des puissances du déterminant près.

Décomposition tensorielle fonctorielle globale. – Notre premier résultat est un analogue fonctoriel de la décomposition (1). Il ramène la compréhension des simples de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; K)$ à celle de deux classes fondamentales de foncteurs.

La première, celle des *foncteurs polynomiaux*, fut introduite dès les années 1950 par Eilenberg et MacLane [19] à des fins de topologie algébrique; elle est reliée à la notion de représentation polynomiale des groupes linéaires. Les foncteurs polynomiaux constituent une généralisation naturelle des foncteurs additifs (les foncteurs polynomiaux de degré 1 sont, à un terme constant près, les foncteurs additifs). Nous renvoyons le lecteur à la section 2 pour plus de détails sur cette notion classique.

La deuxième classe fondamentale de foncteurs, celle des *foncteurs antipolynomiaux*, ne semble pas avoir reçu d'attention particulière jusqu'à présent. Afin de la définir, nous introduisons à la définition 4.1 la notion de catégorie K -triviale : c'est une petite catégorie additive $\mathcal{B}$ telle que, pour tous objets x et y de $\mathcal{B}$, le groupe abélien $\mathcal{B}(x, y)$ est fini et d'ordre inversible dans K . Nous dirons qu'un foncteur de $\mathcal{F}(\mathcal{A}; K)$ est *antipolynomial* s'il se factorise à travers un foncteur additif $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ dont le but est une catégorie K -triviale (voir la définition 4.2).

Foncteurs polynomiaux et foncteurs antipolynomiaux forment deux classes de foncteurs essentiellement disjointes : par la proposition 4.8, seuls les foncteurs constants sont simultanément polynomiaux et antipolynomiaux. Le terme « antipolynomial » se justifie par le fait que cette classe de foncteurs possède des propriétés très différentes des foncteurs polynomiaux. Par exemple, les simples antipolynomiaux sont automatiquement à valeurs de dimensions finies (voir la proposition 4.8) et leurs fonctions de dimensions sont – au moins conjecturalement – des polynômes d'exponentielles (voir la proposition 6.9 et la conjecture 6.8), alors que les fonctions de dimensions des foncteurs polynomiaux simples sont des polynômes.

Le résultat suivant montre qu'une large classe de foncteurs de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; K)$ est construite à partir des foncteurs polynomiaux et antipolynomiaux :

THÉORÈME 2 (corollaire 4.11). – *Soit F un foncteur de longueur finie de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A}; K)$. Alors il existe un unique bifoncteur B de $\mathcal{F}^{\mathrm{df}}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}; K)$ qui est polynomial par rapport à la première variable et antipolynomial par rapport à la seconde tel que F soit isomorphe à la composée de B et de la diagonale $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.*

On en déduit notre premier théorème fondamental sur la structure des foncteurs simples. Dans cet énoncé, le produit tensoriel de foncteurs est pris sur K et se calcule au but : $(S \otimes T)(a) = S(a) \otimes_K T(a)$.