Séminaire BOURBAKI Avril 2021
72^{e} année, 2019–2021, n^{o} 1177, p. 345 à 406
doi : 10.24033/ast.1166

LE PRINCIPE D'INCERTITUDE FRACTAL
[d'après Bourgain, Dyatlov, Jin, Nonnenmacher, Zahl]

par **Nguyen Viet Dang**

1. INTRODUCTION

Le principe d'incertitude joue un rôle central en physique mathématique, dans de nombreuses questions d'analyse des phénomènes quantiques, analyse harmonique et également dans le traitement du signal. De façon intuitive, ce principe nous dit qu'on ne peut pas localiser simultanément la position et le moment d'une particule quantique. Depuis 2016, il s'est développé autour de Dyatlov un nouveau principe d'incertitude dit « fractal ». Il s'agit d'un énoncé d'analyse harmonique sur la droite réelle qui interdit à une fonction dans L^2 d'être localisée simultanément en position et en fréquence près d'ensembles fractals vérifiant certaines hypothèses de porosité. Techniquement, on s'intéresse à des problèmes de décroissance de la transformée de Fourier quand on la restreint en position et en moment à des $\hbar$-voisinages d'ensembles fractals, $\hbar \in (0, 1]$ est un petit paramètre qui joue le rôle de la constante de Planck.

Ce principe développé par Dyatlov en collaboration avec Bourgain, Jin, Nonnenmacher et Zahl met clairement en évidence la nécessité d'utiliser des méthodes nouvelles issues de l'analyse harmonique, la combinatoire additive et la théorie ergodique pour progresser dans l'analyse spectrale, car les outils micro-locaux ne suffisent plus : l'analyse fine d'intégrales oscillantes au voisinage d'ensembles fractals va au delà des techniques usuelles de phase stationnaire.

Dans cet exposé basé en partie sur les excellents articles de revue de Dyatlov (2017, 2019), nous allons décrire ce principe d'incertitude et ses applications spectaculaires à des problèmes d'analyse géométrique sur des surfaces à courbure négative constante :

1) Une preuve de trou spectral pour la fonction zêta de Selberg sur les surfaces hyperboliques convexes cocompactes, sans aucune hypothèse sur l'exposant critique de l'ensemble limite.

2) Des nouvelles estimées de prolongement unique pour les fonctions propres du laplacien sur des surfaces hyperboliques améliorant considérablement ce qu'on pouvait obtenir classiquement avec les méthodes d'inégalités de Carleman. La méthode

utilisée permet d'en déduire presque immédiatement que les mesures semiclassiques, associées au laplacien Δ_g sur une surface hyperbolique compacte M, chargent tous les ouverts du cotangent unitaire S^*M. Ce résultat sur les mesures semiclassiques est une percée spectaculaire depuis les travaux d'Anantharaman (2008) et Anantharaman et Nonnenmacher (2007), et Rivière (2010) autour des conjectures d'unique ergodicité quantique.

Signalons que Dyatlov, Jin et Nonnenmacher (2019) sont parvenus à étendre l'estimée de prolongement unique et le résultat sur le support des mesures semiclassiques au cas des surfaces à courbure négative stricte variable. Pour garder la taille de notre rapport dans des proportions raisonnables, nous ne discuterons que très brièvement de ce résultat important.

Mais avant de commencer, il s'agit de rappeler certaines notions qui apparaissent dans le titre de l'exposé, il s'agit des fractales et du principe d'incertitude.

1.1. Le principe d'incertitude traditionnel

Rappelons le principe d'incertitude traditionnel. Notons $\widehat{p} = i\hbar\partial_x$ l'opérateur de moment et $\widehat{x}$ l'opérateur de position qui n'est rien d'autre que l'opérateur de multiplication par x. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$; on sait que $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$ par le théorème de Plancherel. Le principe d'incertitude en mécanique quantique s'exprime sous la forme d'une inégalité qui quantifie le fait qu'on ne peut pas localiser simultanément le support de φ en position et le support de $\widehat{\varphi}$ en moment. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\langle \widehat{x} \rangle_\varphi = \langle \varphi, \widehat{x}\varphi \rangle = 0$, $\langle \widehat{p} \rangle_\varphi = \langle \varphi, \widehat{p}\varphi \rangle = 0$, alors :

$$\hbar\langle \varphi, \varphi \rangle = \mathrm{Im}\left(\left\langle \varphi, [\widehat{p}\,, \widehat{x}\,]\varphi \right\rangle\right) \leqslant 2\| \widehat{x}\varphi\|_{L^2} \cdot \|\widehat{p}\varphi\|_{L^2},$$

où on a utilisé la fameuse relation d'anticommutation $[\widehat{p}\,, \widehat{x}\,] = i\hbar$ en Mécanique quantique (relation de structure dans l'algèbre de Heisenberg) et l'inégalité de Cauchy–Schwartz. Comme $\langle \widehat{x} \rangle_\varphi = \langle \widehat{p} \rangle_\varphi = 0$, on sait que $\|\widehat{x}\varphi\|_{L^2}$ et $\|\widehat{p}\varphi\|_{L^2}$ sont des variances quantiques Δx et Δp donc on réécrit l'inégalité du principe d'incertitude comme

$$\frac{\hbar}{2} \leqslant \Delta x \Delta p. \tag{1}$$

Dans la version semiclassique, on peut aussi reformuler le principe d'incertitude sur $[0,\hbar]$ de la façon suivante. Soit $\mathbb{1}_{[0,\hbar]}$, l'indicatrice de l'intervalle $[0,\hbar]$, alors on voudrait étudier la norme d'opérateur de $\mathbb{1}_{[0,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar\mathbb{1}_{[0,\hbar]}$ où

$$\mathcal{F}_\hbar(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi x/\hbar} f(x)\,\mathrm{d}x$$

est la transformée de Fourier semiclassique[1]. Une majoration grossière nous donne :

$$\begin{aligned}\left\|\mathbb{1}_{[0,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar\mathbb{1}_{[0,\hbar]}\right\|_{L^2\to L^2} &\leqslant \left\|\mathbb{1}_{[0,\hbar]}\right\|_{L^\infty\to L^2}\cdot\left\|\mathcal{F}_\hbar\right\|_{L^1\to L^\infty}\cdot\left\|\mathbb{1}_{[0,\hbar]}\right\|_{L^2\to L^1}\\ &\leqslant \hbar^{\frac{1}{2}}(C\hbar^{-\frac{1}{2}})\hbar^{\frac{1}{2}} = C\hbar^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

[1] Ici la transformée de Fourier semiclassique est normalisée pour être unitaire sur L^2.

où la constante C ne dépend pas de $\hbar$ et les termes aux deux extrémités se contrôlent avec Cauchy–Schwarz (on aurait pu utiliser l'inégalité de Hölder mais ça n'aurait pas amélioré les estimées).

En général, le principe d'incertitude fractal concerne une localisation en position et en fréquence dans des $\hbar$-voisinages de fractals X et Y, au lieu de l'intervalle $[0,\hbar]$. De façon imprécise, on dira que des ensembles (X,Y) en position, fréquence vérifient un principe d'incertitude fractal s'il existe des constantes $C,\beta>0$ telles que pour tout $\hbar\in(0,1]$, on ait une estimée de la forme :

$$\left\|\mathbb{1}_{Y+[-\hbar,\hbar]}\mathcal{F}_\hbar\mathbb{1}_{X+[-\hbar,\hbar]}\right\|_{L^2\to L^2}\leqslant C\hbar^\beta. \tag{2}$$

Nous n'irons pas plus loin dans la description des principes d'incertitudes classiques car nous n'en aurons pas besoin dans l'exposé, nous rappellerons seulement les principes de prolongement uniques dus à Logvinenko et Sereda (1974) car ils joueront un rôle central dans la preuve du principe d'incertitude fractal.

1.2. Prolongement unique quantitatif : exemples simples

Dans ce paragraphe, nous donnons des exemples élémentaires du principe de prolongement unique qui va revenir à plusieurs reprises dans notre exposé aussi bien dans la preuve du principe d'incertitude fractal que dans les estimées sur les fonctions propres du laplacien sur les surfaces hyperboliques.

1.2.1. *L'espace de Paley–Wiener.* — Nos exemples reposent sur l'espace de Paley–Wiener des fonctions à transformée de Fourier à support compact. Le premier principe d'incertitude se lit de la façon suivante :

Lemme 1.1 (Paley–Wiener). — *Une fonction $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f}$ est à support compacte ne peut pas être à support compact sauf si $f=0$* [2].

Le théorème de Paley Wiener que nous venons de mentionner est la première manifestation du principe d'incertitude. L'objectif de ce paragraphe est de chercher une version plus quantitative de l'énoncé ci-dessus. Pour illustrer le type d'idée que nous allons utiliser, nous allons prouver un théorème de prolongement unique qui illustre de façon quantitative l'observation ci-dessus et dont la maxime peut se résumer de la façon suivante : *Quand le spectre est borné, alors la taille de la fonction f est contrôlée par la taille de sa restriction à tout intervalle I.* Ce principe joue un rôle central dans la preuve du principe d'incertitude fractal et il est très utile en théorie du contrôle car il répond à la question : étant donné f satisfaisant une contrainte, par exemple f solution d'une EDP ou $\widehat{f}$ supportée dans un certain ensemble, si on sait que $f_{|U}$ est petit en norme L^2 sur un certain ensemble U, que peut-on dire de f partout ?

[2] Soit une fonction $f\in L^2(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est supportée par un ensemble Y ***borné***. On sait par le théorème de Paley–Wiener que f est analytique donc f ne peut pas s'annuler sur un intervalle I car sinon f serait identiquement nulle.

Lemme 1.2 (prolongement unique élémentaire). — *Soient un ensemble $Y \subset \mathbb{R}$* ***borné*** *et I un intervalle. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\hbar \in (0, +\infty)$ on ait*

$$\operatorname{supp}(\widehat{f}\,) \subset \hbar^{-1}Y \implies \|f\|_{L^2(\hbar I)} \geqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3}$$

Nous faisons dépendre l'inégalité (3) d'un paramètre d'échelle $\hbar$ pour que le lecteur puisse comprendre comment l'estimée se comporte par changement d'échelle. Ce type de raisonnement va revenir sous forme amplifiée dans la section 3. Nous allons employer des outils élémentaires des fonctions à transformée de Fourier à support borné dans la preuve :

1) les inégalités de Bernstein qui contrôlent la norme sup des dérivées (voir Meyer, 1998, p. 17),
2) la compacité (propriété de Montel).

Une fonction L^2 dont le spectre est borné n'a pas le droit de trop osciller et donc ses dérivées sont contrôlées par sa norme L^2. Cette observation est réalisée de façon quantitative par le lemme de Bernstein (voir par exemple Meyer, 1998, p. 17), qui est une manifestation élémentaire du principe d'incertitude. Rappelons de quoi il s'agit. Supposons que l'ensemble Y du lemme 1.2 soit contenu dans $[-R, R]$. Étant donnée $\widehat{f}$ supportée par Y,

$$\begin{aligned}\left\|\partial_x^k f\,\right\|_{L^\infty} &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}}(i\xi)^k\,\mathrm{e}^{i\xi\cdot x}\,\widehat{f}\,(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\left\langle \mathbb{1}_Y(i\xi)^k\,\mathrm{e}^{ix\xi}, \widehat{f}\,\right\rangle\right| \\ &\leqslant \left\|(i\xi)^k\mathbb{1}_Y(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\,\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\cdot\|\widehat{f}\,\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant R^k\|\mathbb{1}_Y\|_{L^2(\mathbb{R})}\cdot\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

comme $|(i\xi)^k\mathbb{1}_Y(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}| \leqslant R^k\mathbb{1}_Y(\xi)$.

Comme la norme L^∞ de f' est bornée, f a ses accroissements bornés donc elle est uniformément continue. Toute suite bornée dans L^2 dont le support de Fourier est contenu dans Y est donc bornée dans C^1 et par Ascoli–Arzela, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^2. Vérifions que la limite f a sa transformée de Fourier à support dans Y. Si $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$ alors $f_n \to f$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et donc pour toute fonction test φ telle que $\widehat{\varphi}$ n'est pas supportée dans Y, on a $0 = \langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ donc $\langle f, \varphi\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle = 0$ et $\widehat{f}$ est supportée par Y. Donc on a bien la propriété de compacité.

Démonstration. — Maintenant on peut prouver très simplement le lemme 1.2. Remarquons qu'il suffit de fixer le facteur de changement d'échelle $\hbar = 1$ et de montrer que $\operatorname{supp}(\widehat{f}\,) \subset Y \implies \|f\|_{L^2(I)} \geqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$, le cas général s'en déduit par un simple changement de variables. Supposons par l'absurde que l'inégalité précédente est fausse. Soit $R > 0$ tel que $Y \subset [-R, R]$. On aura une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_n\|_{L^2} = 1, \operatorname{supp}(\widehat{f}\,) \subset [-R, R]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\|f_n\|_{L^2(I)} \to 0$. Par la propriété de Montel, on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^2 vers f telle que $\|f\|_{L^2} = 1, \operatorname{supp}(\widehat{f_n}) \subset [-R, R]$ et $\|f\|_{L^2(I)} = 0$, donc la restriction de f à I vaut 0. Or f est analytique par Paley Wiener donc $f = 0$, contradiction. □

1.3. Les fractales, notions basiques

Passons maintenant en revue deux exemples célèbres, classiques et importants de fractales pour se donner une intuition : le Cantor et les ensembles limites de Schottky. Ensuite nous présenterons les puissantes notions de régularité et porosité nécessaires à la formulation du principe d'incertitude fractal.

1.3.1. *Exemples de base de fractales autosimilaires, le Cantor.* — Des exemples célèbres de fractals sont l'ensemble de Cantor, le tapis de Sierpinski et le carré de Sierpinski qui ont la particularité d'être tous les trois des fractales dits « autosimilaires » : on peut les générer de façon algébro-dynamique en itérant des applications affines. Décrivons l'exemple des Cantor en suivant la présentation de Gouëzel (2019) : soit l'ensemble des deux contractions affines $\{x \mapsto \lambda x, x \mapsto 1 + \lambda(1 - x)\}$ qui ont $\{0, 1\}$ pour points fixes. Ces deux contractions vont être notées par (T_a, T_b) où on va penser à $\{a, b\}$ comme un alphabet de deux lettres. On va créer une suite $K_0, K_1, \ldots, K_n$ de compacts emboîtés qui vont converger (pour la topologie de Hausdorff) vers l'ensemble de Cantor K_∞. On considère

$$K_n = \bigcup_{w \in \{a,b\}^n} T_w(K_0)$$

où K_0 est l'intervalle $[0, 1]$. Donc K_n est une union d'intervalles disjoints codés par des mots de longueur n que l'on peut former avec les lettres $\{a, b\}$, à chaque mot correspond une suite d'itération des applications affines. On voit immédiatement que les K_n sont bien emboîtés[3], par stabilité des applications affines et que leur intersection notée K_∞ définit l'ensemble de Cantor. Remarquons aussi que par construction, les bords des intervalles composant chaque K_n sont préservés par les itérations et sont donc contenus dans K_∞.

Une autre observation qui est utile pour la suite, c'est qu'on peut représenter les différents intervalles qui composent K_n par des feuilles d'un arbre binaire qui encode la combinatoire des mots. Les éléments de K_∞ peuvent donc être visualisés comme des chemins partant de la racine vers l'infini dans un arbre binaire infini.

1.3.2. *Les ensembles limites de groupes de Schottky.* — Nous allons également employer des « mots » pour décrire ce genre de fractales. Ces ensembles limites sont des fractales qui jouent un rôle central dans les résultats sur la fonction zêta de Selberg. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit par isométries sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ par homographies et il induit une action sur $\mathbb{R}$, vu comme bord à l'infini de l'espace hyperbolique, de la forme $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur $x \in \mathbb{R}$ par $\gamma \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$ ·.

On se donne $2r$ intervalles disjoints dans $\mathbb{R}$. Comme plus haut dans l'ensemble de Cantor, on va coder l'action des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2r}$ par des mots dans l'alphabet à $2r$ éléments $\mathcal{A} = \{1, \ldots, 2r\}$. On munit $\mathcal{A}$ d'une involution $a \mapsto \bar{a}$ qui agit comme

$$1, \ldots, r \mapsto r + 1, \ldots, 2r \text{ et } r + 1, \ldots, 2r \mapsto 1, \ldots, r.$$

[3] L'observation centrale c'est que T_a (resp. T_b) envoie l'intervalle $[0, 1]$ dans $[0, \lambda]$ (resp. $[1 - \lambda, 1]$).