Séminaire BOURBAKI Avril 2021
72e année, 2019–2021, no 1178, p. 407 à 424
doi : 10.24033/ast.1167

SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES DES ESPACES DE MODULES DE RIEMANN [d'après Eskin, McMullen, Mukamel, Wright]

par **Élise Goujard**

INTRODUCTION

Soit $\mathcal{M}_{g,n}$ l'espace de modules des surfaces de Riemann de genre g à n points marqués. Cet espace est muni de la métrique de Teichmüller qui permet de comparer les structures conformes sur les surfaces. Cette métrique, qui coïncide avec la métrique de Kobayashi, est une métrique de Finsler non riemannienne. Une sous-variété de $\mathcal{M}_{g,n}$ est dite *totalement géodésique* si elle contient toutes les géodésiques de Teichmüller qui lui sont tangentes. Les sous-variétés totalement géodésiques de dimension (complexe) 1, appelées courbes de Teichmüller, sont relativement bien étudiées depuis les premières constructions de Veech dans les années 80 ; elles sont en particulier infiniment nombreuses dans chaque espace de modules $\mathcal{M}_{g,n}$. Récemment, Wright a montré, en s'appuyant sur des résultats de finitude d'Eskin, Filip et Wright, qu'en dimension plus grande, ce n'était plus le cas : il n'y a qu'un nombre fini de telles sous-variétés dans chaque $\mathcal{M}_{g,n}$. Un premier exemple de telle sous-variété primitive de dimension 2 dans $\mathcal{M}_{1,3}$ a été construit par McMullen, Mukamel et Wright à partir de courbes cubiques projectives ; Eskin, McMullen, Mukamel et Wright ont ensuite trouvé deux autres exemples de telles sous-variétés.

Remerciements

Je remercie chaleureusement Christophe Bavard, Yohan Brunebarbe, Vincent Delecroix, Curtis McMullen, Duc-Manh Nguyen, Yohann Le Floch et Nicolas Bourbaki pour leurs commentaires et leur lecture attentive des premières versions de ce texte. Je remercie également plus généralement mes collègues de Bordeaux pour leurs questions, discussions et suggestions à propos de ces résultats et de leur présentation.

1. FINITUDE DES SOUS-VARIÉTÉS TOTALEMENT GÉODÉSIQUES

Soit X une surface de Riemann de genre g à n points marqués. Un marquage sur X est un difféomorphisme f d'une surface fixée S de genre g à n points marqués dans X, qui respecte l'ensemble des points marqués. On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des surfaces marquées de la façon suivante : $(X_1, f_1) \sim (X_2, f_2)$ s'il existe un biholomorphisme $g\colon X_1 \to X_2$ préservant les points marqués tel que $g \circ f_1$ est isotope à f_2. On définit l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de ces surfaces marquées.

L'espace de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ des surfaces de Riemann de genre g à n points marqués est l'ensemble de ces surfaces modulo les biholomorphismes préservant les points marqués. Il s'agit du quotient de $\mathcal{T}_{g,n}$ par le groupe modulaire $\mathrm{Mod}_{g,n}$, le groupe des difféomorphismes d'une surface de genre g à n points marqués préservant l'orientation et le marquage des points, à isotopie près. Le groupe $\mathrm{Mod}_{g,n}$ agit proprement et discontinûment (avec points fixes) sur $\mathcal{T}_{g,n}$; les stabilisateurs pour cette action sont finis. La projection naturelle est notée

$$\pi\colon \mathcal{T}_{g,n} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,n} = \mathcal{T}_{g,n}/\mathrm{Mod}_{g,n}\,.$$

L'espace $\mathcal{T}_{g,n}$ est une variété analytique complexe de dimension $3g-3+n$, tandis que l'espace $\mathcal{M}_{g,n}$ a une structure d'orbivariété complexe (de même dimension). Par abus de langage, on parlera de sous-variétés de $\mathcal{M}_{g,n}$ pour désigner des sous-orbivariétés.

1.1. Métrique de Teichmüller

La métrique de Teichmüller sur $\mathcal{T}_{g,n}$ permet de comparer les structures conformes sur les surfaces de genre g à n points marqués. Soient deux surfaces X et Y de $\mathcal{T}_{g,n}$ et une application différentiable $f\colon X \to Y$. Alors f agit en envoyant localement des cercles infinitésimaux sur des ellipses infinitésimales. On appelle coefficient d'excentricité de f et on note $K(f)$ le supremum de tous les coefficients d'excentricité locaux obtenus ainsi. Ce coefficient mesure le taux de non-conformité : f est dite conforme si $K(f) = 1$ et quasiconforme si $K(f)$ est fini. D'après un théorème de Teichmüller, l'infimum du logarithme de $K(f)$, sur l'ensemble des difféoméorphismes quasiconformes isotopes à l'identité, est atteint en une fonction (dite *extrémale*), unique à composition par des applications conformes près, telle que tous les coefficients d'excentricité locaux de cette fonctions sont constants, excepté en un nombre fini de points. Cet infimum définit alors la *distance de Teichmüller* entre X et Y. L'espace $\mathcal{T}_{g,n}$ muni de la métrique induite par cette distance est complet.

Une différentielle quadratique méromorphe sur X est une section méromorphe du carré symétrique du fibré cotangent T^*X (expressions locales de la forme $f(z)\,\mathrm{d}z^2$ avec f méromorphe). Pour une surface de Riemann X à n points marqués, on note $\mathcal{Q}^1(X)$ l'espace vectoriel des différentielles quadratiques intégrables sur X, avec pôles uniquement en les points marqués (la condition d'intégrabilité assure que ces pôles sont au plus simples). D'après un résultat classique en théorie de Teichmüller, l'espace tangent à $\mathcal{T}_{g,n}$ au point X est canoniquement isomorphe au dual de $\mathcal{Q}^1(X)$ (pour $q \in \mathcal{Q}^1(X)$, la différentielle de Beltrami $\overline{q}/|q|$ représente un vecteur tangent à X) . Ainsi $\mathcal{T}_{g,n}$ est muni d'une métrique de Finsler : il suffit de prendre sur chaque espace tangent la norme duale à la norme L^1 sur $Q^1(X)$ (norme de $q \in Q^1(X)$ donnée par $\|q\| = \int_X |q|$). Cette métrique de Finsler coïncide avec la métrique de Teichmüller, à un facteur $\frac{1}{2}$ près. La métrique de Teichmüller n'est par contre pas riemannienne.

Enfin, la métrique de Teichmüller coïncide avec la métrique de Kobayashi d'après un théorème de Royden (1971).

1.2. Courbes de Teichmüller et autres sous-variétés totalement géodésiques

On appellera *géodésique complexe* ou *disque de Teichmüller* de $\mathcal{T}_{g,n}$ tout plongement isométrique holomorphe du demi-plan hyperbolique $\mathbb{H}$ dans $\mathcal{T}_{g,n}$, en munissant chaque espace de sa métrique de Kobayashi : métrique hyperbolique sur $\mathbb{H}$ et métrique de Teichmüller sur $\mathcal{T}_{g,n}$. Étant donnés deux points distincts de $\mathcal{T}_{g,n}$, il existe une unique géodésique complexe passant par ces deux points : c'est l'unique plongement isométrique du demi-plan de Poincaré contenant la géodésique réelle passant par ces deux points.

Une sous-variété complexe de $\mathcal{T}_{g,n}$ est dite *totalement géodésique* si elle contient les géodésiques complexes passant par chacune de ses paires de points distincts, ou de façon équivalente, si elle contient toutes les géodésiques complexes passant en point donné dans toutes les directions tangentes à la sous-variété en ce point.

Une sous-variété de $\mathcal{M}_{g,n}$ est dite *totalement géodésique* si une composante de sa préimage par π est totalement géodésique (dans ce cas toute composante de sa préimage l'est également). La dimension d'une sous-variété de $\mathcal{T}_{g,n}$ ou $\mathcal{M}_{g,n}$ sera toujours sa dimension complexe.

Les sous-variétés totalement géodésiques de $\mathcal{M}_{g,n}$ de dimension 1 sont également appelées *courbes de Teichmüller*. Elles sont plus généralement définies via l'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur l'espace de modules des différentielles quadratiques comme on le précisera dans le prochain paragraphe. L'image de presque tout disque de Teichmüller (au sens de la mesure de Masur–Veech) est dense dans $\mathcal{M}_{g,n}$ d'après des résultats de Masur (1982) et Veech (1982).

1.3. Relation avec les sous-variétés linéaires invariantes de $Q_{g,n}$

On a vu précédemment que l'espace de Teichmüller des différentielles quadratiques intégrables sur une surface de genre g à n points marqués (classes d'équivalences modulo les difféomorphismes préservant le marquage des points isotopes à l'identité), s'identifiait au fibré cotangent à $\mathcal{T}_{g,n}$.

Le groupe modulaire agit par image inverse sur les différentielles quadratiques, il agit donc naturellement sur l'espace de Teichmüller et on note $Q_{g,n}$ l'espace quotient par cette action (espace de modules des différentielles quadratiques).

On construit de manière similaire l'espace de modules des différentielles abéliennes (1-formes holomorphes) sur une surface de genre g, qu'on notera $\mathcal{H}_g$.

Rappelons ici quelques propriétés de l'espace de modules $\mathcal{H}_g$ ($\mathcal{Q}_{g,n}$ vérifie des propriétés similaires mais plus longues à exposer ; dans la suite de l'exposé nous allons toujours nous ramener à des différentielles abéliennes, voir paragraphe 1.3.2).

L'espace $\mathcal{H}_g$ est stratifié par la donnée des ordres des zéros des différentielles. Plus précisément, pour k une partition de $2g-2$ on note $\mathcal{H}(k)$ l'ensemble des $(X,\omega) \in \mathcal{H}_g$ dont les zéros de la forme ω sont d'ordres donnés par k. Alors $\mathcal{H}_g$ est la réunion de toutes les strates $\mathcal{H}(k)$ pour toutes les partitions k de $2g-2$. De plus, ces strates sont des orbivariétés complexes de dimension $2g + \ell(k) - 1$ (où $\ell(k)$ est le nombre d'éléments de la partition k), localement modelées sur les groupes d'homologie relative via l'application des périodes, comme précisé ci-dessous.

Pour un point (X,ω) de $\mathcal{H}(k)$, on note Σ le lieu des zéros de ω et $r = |\Sigma| = \ell(k)$. On fixe une base de $H_1(X,\Sigma,\mathbb{Z})$ en concaténant une base symplectique de $H_1(X,\mathbb{Z})$ et $r-1$ chemins reliant un zéro fixé de ω aux $r-1$ autres. Les intégrales de ω le long de ces cycles sont appelées périodes de ω et fournissent des coordonnées locales de la strate $\mathcal{H}(k)$ au voisinage de (X,ω) : l'application qui à ω associe ses périodes est un homéomorphisme local. Les changements de coordonnées étant linéaires, ces coordonnées des périodes munissent chaque strate d'une structure affine.

L'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur l'ensemble des couples (X,ω) est donnée pour A choisi dans $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ par $A \cdot (X,\omega) = (X',\omega')$ où

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\omega' \\ \mathrm{Im}\,\omega' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\omega \\ \mathrm{Im}\,\omega \end{pmatrix}, \tag{1}$$

et X' est l'unique structure de surface de Riemann sur la surface topologique sous-jacente à X rendant ω' holomorphe. Cette action commute avec l'action du groupe modulaire donc induit une action sur $\mathcal{H}_g$, qui préserve naturellement chaque strate. Elle se visualise particulièrement bien en interprétant (X,ω) comme une surface de translation et en choisissant un patron polygonal plat pour celle-ci (voir les explications du paragraphe 2.2). On peut définir une action similaire de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{Q}_{g,n}$ en considérant les racines carrées de différentielles quadratiques.

L'action du groupe à un paramètre de matrices $g_t = \left(\begin{smallmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ pour t réel joue un rôle particulier puisqu'il s'agit de l'action du flot de Teichmüller (flot géodésique pour la métrique de Teichmüller), par des résultats de Teichmüller. C'est-à-dire que $\{(X_t, g_t\cdot\omega)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ (où X_t est la surface de Riemann pour laquelle $g_t\cdot\omega$ est holomorphe) est la géodésique (réelle) de Teichmüller passant par X dans la direction du vecteur tangent correspondant à ω^2 (on définit de même la géodésique engendrée par une différentielle quadratique q). L'action de g_t encode l'action de l'application extrémale de Teichmüller : les axes des ellipses infinitésimales obtenues, d'excentricité constante, sont donnés par les directions horizontales et verticales induites par ω^2 (ou q).

Notons que ω et $A \cdot \omega$ induisent la même structure complexe sur la surface sous-jacente si et seulement si A est la composée d'une rotation (élément de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$) par une dilatation (c'est-à-dire que ω et $A \cdot \omega$ sont reliées par la multiplication par un nombre complexe non nul).

Ainsi, les disques de Teichmüller correspondent à l'image dans $\mathcal{T}_{g,n}$ des orbites par l'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur l'espace de Teichmüller des différentielles quadratiques (ces orbites sont de la forme $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\cdot q$ par la discussion précédente ; rappelons que $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ s'identifie à $\mathbb{H}$).

On appellera disque de Teichmüller *engendré* par une différentielle abélienne ω en un point $X\in\mathcal{T}_{g,n}$ l'image de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})\cdot(X,\omega)$ dans $\mathcal{T}_{g,n}$.

Il s'agit de la réunion des géodésiques réelles émises depuis X dans les directions $\mathrm{e}^{i\theta}\omega^2$ pour θ variant dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Si la projection sur $\mathcal{M}_{g,n}$ d'une telle orbite est fermée, c'est une courbe de Teichmüller.

1.3.1. *Sous-variétés linéaires invariantes de $\mathcal{H}(k)$.* — On appellera *sous-variété linéaire* d'une strate $\mathcal{H}(k)$ toute sous-variété complexe immergée de $\mathcal{H}(k)$, donnée par des équations linéaires à coefficients réels dans les coordonnées des périodes. Une telle sous-variété est souvent appelée « sous-variété affine (ou linéaire) *invariante* » dans la littérature, pour la raison suivante.

Proposition 1.1. — *Une sous-variété linéaire fermée de $\mathcal{H}(k)$ est $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-invariante.*

Démonstration. — $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ agit naturellement sur n'importe quel espace vectoriel complexe admettant une structure réelle. En particulier, l'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur $(X,\omega)\in\mathcal{H}(k)$ se traduit en coordonnées des périodes par l'action naturelle de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur l'espace vectoriel

$$H^1(X,\Sigma,\mathbb{C}) = H^1(X,\Sigma,\mathbb{R})\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$$

(observer l'équation (1)). Une sous-variété linéaire M correspond localement à des sous-espaces vectoriels définis sur $\mathbb{R}$ dans ces coordonnées des périodes, ces espaces sont donc préservés par l'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$. L'action de $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}(k)$ se restreint donc en une action sur M, bien définie globalement (M est fermée). □

La réciproque de ce résultat est le fameux théorème (voir Quint (2016) pour l'exposé Bourbaki correspondant) :

Théorème 1.2 (Eskin, Mirzakhani et Mohammadi, 2015). — *Tout sous-ensemble fermé $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$-invariant de $\mathcal{H}(k)$ est une union finie de sous-variétés linéaires. En particulier l'adhérence de l'orbite d'un point par $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ est une sous-variété linéaire.*

D'après un résultat de Filip (2016), ces sous-variétés linéaires invariantes sont également des variétés algébriques de $\mathcal{H}(k)$, définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$.

Enfin les sous-variétés linéaires forment un ensemble dénombrable dans chaque strate (Eskin, Mirzakhani et Mohammadi, 2015) et elles sont définies (en tant que sous-variétés linéaires) sur des corps de nombres (Wright, 2014).

1.3.2. *Des différentielles quadratiques aux différentielles abéliennes.* — Pour toute différentielle quadratique q sur une surface de Riemann Y de genre g qui n'est pas le carré d'une différentielle holomorphe, il existe un unique revêtement ramifié minimal $X\mapsto Y$ de degré 2, appelé revêtement d'orientation, tel que q se relève en le carré