Séminaire BOURBAKI Novembre 2002
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 910, p. 27 à 62

IRRATIONALITÉ DE VALEURS DE ZÊTA
[d'après Apéry, Rivoal,...]

par **Stéphane FISCHLER**

INTRODUCTION

Cet exposé est consacré aux valeurs aux entiers $s \geqslant 2$ de la fonction zêta de Riemann, définie par $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Quand $s = 2k$ est pair, on sait que $\zeta(2k)\pi^{-2k}$ est un nombre rationnel, lié aux nombres de Bernoulli. Comme π est transcendant (voir l'appendice de [La] pour une preuve), $\zeta(2k)$ l'est aussi pour tout $k \geqslant 1$. La nature arithmétique des $\zeta(2k+1)$ est beaucoup moins bien connue. D'un point de vue conjectural, la situation est simple :

Conjecture 0.1. — *Les nombres π, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7), \ldots$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Cette conjecture est un cas particulier d'une conjecture diophantienne sur les polyzêtas (voir [Wa] ou [Ca2]). Elle implique que les $\zeta(2k+1)$ sont tous transcendants, donc irrationnels, et linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

Très peu de résultats sont connus en direction de la conjecture 0.1. Le premier d'entre eux a été annoncé par Apéry lors des Journées arithmétiques de Luminy, en 1978 :

Théorème 0.2 ([Ap1]). — *$\zeta(3)$ est irrationnel.*

Apéry lui-même n'a donné lors de son exposé (voir [Me]), et n'a publié [Ap1], qu'une esquisse de sa preuve. Les détails (qui sont loin d'être triviaux) ont été publiés par Van Der Poorten [Po1] (voir aussi [Coh1] et [Re1]), grâce à des contributions de Cohen et Zagier. Par la suite, plusieurs autres démonstrations du théorème d'Apéry sont parues. La première partie de ce texte est consacrée à une synthèse des différents points de vue qu'on peut adopter pour le démontrer.

La grande percée suivante date de 2000 :

Théorème 0.3 ([Ri1], [BR]). — *Le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par* 1, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, $\zeta(7), \ldots$ *est de dimension infinie.*

En conséquence, il existe une infinité de k tels que $\zeta(2k+1)$ soit irrationnel. On peut donner des versions effectives de ce dernier énoncé : Rivoal a démontré [Ri3] que parmi les neuf nombres $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, l'un au moins est irrationnel. Ce résultat a été amélioré par Zudilin :

Théorème 0.4 ([Zu1], [Zu4]). — *L'un au moins des quatre nombres* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$, $\zeta(11)$ *est irrationnel.*

Malgré ces développements récents, il n'existe aucun entier $s \geqslant 5$ impair pour lequel on sache si $\zeta(s)$ est rationnel ou non.

Ce texte est divisé en trois parties. La première est une synthèse des méthodes connues pour démontrer l'irrationalité de $\zeta(3)$; l'intérêt des différentes approches est qu'elles se généralisent plus ou moins facilement à d'autres situations. La deuxième partie fournit une preuve du théorème 0.3, et de résultats voisins. La troisième est consacrée à des résultats « quantitatifs » : mesure d'irrationalité de $\zeta(3)$ et théorème 0.4.

Remerciements. — Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé dans la préparation de ce texte, notamment F. Amoroso, V. Bosser, N. Brisebarre, P. Cartier, G. Christol, P. Colmez, P. Grinspan, L. Habsieger, M. Huttner, C. Krattenthaler, C. Maclean, F. Martin, Yu. Nesterenko, F. Pellarin, A. Pulita, E. Royer, M. Waldschmidt, D. Zagier et W. Zudilin. Je remercie tout particulièrement T. Rivoal pour les nombreuses discussions très instructives que nous avons eues.

1. IRRATIONALITÉ DE $\zeta(3)$

Toutes les preuves connues de l'irrationalité de $\zeta(3)$ ont la même structure. On construit, pour tout $n \geqslant 0$, des nombres rationnels u_n et v_n ayant les propriétés suivantes :

(1) La forme linéaire $I_n = 2\,(u_n\zeta(3) - v_n)$ vérifie

$$\limsup_{n\to\infty} |I_n|^{1/n} \leqslant (\sqrt{2}-1)^4 = 0,0294372\ldots$$

(2) En notant d_n le p.p.c.m. des entiers compris entre 1 et n, les coefficients u_n et v_n vérifient :

$$u_n \in \mathbb{Z} \text{ et } 2d_n^3 v_n \in \mathbb{Z}.$$

(3) Pour une infinité d'entiers n, on a $I_n \neq 0$.

La conclusion est alors immédiate : si $\zeta(3)$ était un nombre rationnel p/q, alors $qd_n^3 I_n$ serait un entier pour tout n, et tendrait vers zéro quand n tend vers l'infini (car $(\sqrt{2}-1)^4 e^3 < 1$, en utilisant [Ing] le théorème des nombres premiers sous la forme $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(d_n)}{n} = 1$) : cela contredit la troisième assertion.

Remarque 1.1. — Comme $(\sqrt{2}-1)^4 \cdot 3,23^3 < 1$, le théorème des nombres premiers peut être remplacé par l'assertion plus faible $d_n < 3,23^n$ pour n assez grand, qui se démontre en utilisant des arguments élémentaires à la Tchebychev ([NZM], § 8.1 ; [Ing], p. 15).

Dans la suite, on donne plusieurs constructions (§ 1.1 à 1.10) de u_n, v_n et I_n, à chaque fois notées $u_{i,n}$, $v_{i,n}$ et $I_{i,n}$ (l'indice $i \in \{\mathrm{R}, \mathrm{E}, \mathbb{R}, \Sigma, \mathbb{C}, \mathrm{P}, \mathrm{TB}, \mathrm{M}\}$ fait référence à la construction utilisée). En fait, on construit toujours les mêmes formes linéaires : *a posteriori* on s'aperçoit que $u_{i,n}$, $v_{i,n}$ et $I_{i,n}$ ne dépendent pas de i. La preuve de cette indépendance est le plus souvent directe. Parfois, on montre simplement que $I_{i,n} = I_{j,n}$; les deux autres égalités en découlent en utilisant l'irrationalité de $\zeta(3)$.

Les premières valeurs de u_n et v_n sont :

$$(u_n)_{n\geqslant 0} = 1, 5, 73, 1445, 33001, 819005, \ldots$$
$$(v_n)_{n\geqslant 0} = 0, 6, \frac{351}{4}, \frac{62531}{36}, \frac{11424695}{288}, \ldots$$

Cette partie contient l'esquisse de plusieurs preuves de l'irrationalité de $\zeta(3)$, notamment celles d'Apéry [Ap1] (§ 1.1 et 1.2), de Beukers [Be1] par les intégrales multiples (§ 1.3) ou [Be6] par les formes modulaires (§ 1.10), de Prévost [Pr1] (§ 1.1 et 1.2), de Nesterenko [Ne2] (§ 1.4 et 1.5), de Sorokin [So3] (§ 1.8), et de nombreuses variantes. Certaines preuves sont obtenues en montrant que deux constructions différentes fournissent les mêmes formes linéaires, puis en prouvant le point (2) à l'aide de l'une et les points (1) et (3) à l'aide de l'autre (par exemple en montrant que $\lim_{n\to\infty} |I_n|^{1/n} = (\sqrt{2}-1)^4$).

La plupart des méthodes connues pour démontrer des résultats d'irrationalité sur les valeurs de ζ sont liées aux polylogarithmes, définis pour tout entier $k \geqslant 1$ par :

$$\mathrm{Li}_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k},$$

avec $|z| < 1$ si $k = 1$ et $|z| \leqslant 1$ si $k \geqslant 2$. L'idée est de construire des formes linéaires en polylogarithmes, à coefficients polynomiaux, puis de spécialiser en $z = 1$. C'est la méthode employée dans les paragraphes 1.3 à 1.9. Les formes linéaires en polylogarithmes $I_{i,n}(z)$ qu'on utilise ne sont pas toujours les mêmes, mais elles coïncident en $z = 1$, pour donner les formes linéaires d'Apéry.

Les polylogarithmes s'insèrent dans la famille des séries hypergéométriques ${}_{q+1}F_q$ (avec $q \geqslant 1$), définies par :

$$ {}_{q+1}F_q\left(\begin{matrix}\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \\ \beta_1, \ldots, \beta_q\end{matrix}\,\middle|\, z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_0)_k(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_q)_k}{k!\,(\beta_1)_k \cdots (\beta_q)_k} z^k\,, $$

où le symbole de Pochhammer est $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$. Dans cet exposé, les α_j et les β_j seront des entiers, les β_j étant positifs, et z sera un nombre complexe avec $|z| \leqslant 1$. On adopte les définitions suivantes ([AAR], § 3.3 et 3.4) :

- ${}_{q+1}F_q$ est dite *bien équilibrée* si $\alpha_0 + 1 = \alpha_1 + \beta_1 = \cdots = \alpha_q + \beta_q$;
- ${}_{q+1}F_q$ est dite *très bien équilibrée* si elle est bien équilibrée et $\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0 + 1$.

1.1. Récurrence linéaire

Définition 1.2. — *Soient* $(u_{\mathrm{R},n})_{n\geqslant 0}$ *et* $(v_{\mathrm{R},n})_{n\geqslant 0}$ *les suites définies par la relation de récurrence*

$$ (n+1)^3 y_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) y_n + n^3 y_{n-1} = 0 \tag{1} $$

et les conditions initiales

$$ u_{\mathrm{R},0} = 1, \quad u_{\mathrm{R},1} = 5, \quad v_{\mathrm{R},0} = 0, \quad v_{\mathrm{R},1} = 6. $$

Une récurrence immédiate montre que les suites $(u_{\mathrm{R},n})$ et $(v_{\mathrm{R},n})$ sont croissantes et à termes rationnels, avec $n!^3 u_{\mathrm{R},n} \in \mathbb{Z}$ et $n!^3 v_{\mathrm{R},n} \in \mathbb{Z}$. En fait on verra qu'on peut remplacer $n!^3$ par d_n^3.

Les propriétés asymptotiques des suites vérifiant la récurrence (1) sont faciles à déterminer (voir par exemple [Gel], Chapitre 5). L'équation caractéristique associée est $X^2 - 34X + 1$; elle a deux racines simples, $(\sqrt{2}+1)^4$ et $(\sqrt{2}-1)^4$. L'espace vectoriel des solutions de (1) est de dimension deux, et admet une base formée de suites $(y_n^{(0)})_{n\geqslant 0}$ et $(y_n^{(1)})_{n\geqslant 0}$ avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|y_n^{(0)}|}{n} = \log((\sqrt{2}+1)^4)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|y_n^{(1)}|}{n} = \log((\sqrt{2}-1)^4)$. La suite $(y_n^{(1)})$ est uniquement déterminée (à proportionnalité près) par son comportement asymptotique ; les solutions non multiples de $(y_n^{(1)})$ se comportent comme $(y_n^{(0)})$. Comme $(u_{\mathrm{R},n})$ et $(v_{\mathrm{R},n})$ sont croissantes, on a :

$$ \lim_{n\to\infty} u_{\mathrm{R},n}^{1/n} = \lim_{n\to\infty} v_{\mathrm{R},n}^{1/n} = (\sqrt{2}+1)^4 = 33,9705627\ldots \tag{2} $$

Quand on adopte ce point de vue, on a intérêt [Po1] à considérer $\Delta_n = \begin{vmatrix} v_{\mathrm{R},n} & v_{\mathrm{R},n-1} \\ u_{\mathrm{R},n} & u_{\mathrm{R},n-1}\end{vmatrix}$ pour $n \geqslant 1$. La relation de récurrence montre qu'on a $\Delta_n = \frac{6}{n^3}$ pour tout n, ce qui signifie $\frac{v_{\mathrm{R},n}}{u_{\mathrm{R},n}} - \frac{v_{\mathrm{R},n-1}}{u_{\mathrm{R},n-1}} = \frac{6}{n^3 u_{\mathrm{R},n} u_{\mathrm{R},n-1}}$. Donc la suite $(\frac{v_{\mathrm{R},n}}{u_{\mathrm{R},n}})$ est strictement croissante et tend vers une limite finie ℓ, avec $u_{\mathrm{R},n}\ell - v_{\mathrm{R},n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6u_{\mathrm{R},n}}{k^3 u_{\mathrm{R},k} u_{\mathrm{R},k-1}}$. Ceci prouve que $u_{\mathrm{R},n}\ell - v_{\mathrm{R},n}$ est une solution de (1) qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini : son comportement asymptotique est nécessairement donné par

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log|u_{\mathrm{R},n}\ell - v_{\mathrm{R},n}|}{n} = \log((\sqrt{2}-1)^4).$$

Avec cette définition de $u_{\mathrm{R},n}$ et $v_{\mathrm{R},n}$, il n'est pas évident de démontrer que $\ell = \zeta(3)$, et de borner par d_n^3 les dénominateurs de $u_{\mathrm{R},n}$ et $v_{\mathrm{R},n}$. Pour ceci, une possibilité est de faire le lien avec le paragraphe 1.2 : c'est la méthode employée dans les premières preuves détaillées de l'irrationalité de $\zeta(3)$, qui sont parues peu après l'exposé d'Apéry ([Re1], [Po1], [Coh1]).

Remarque 1.3. — Le raisonnement ci-dessus montre que $\frac{v_{\mathrm{R},n}}{u_{\mathrm{R},n}}$ est la n-ième somme partielle de la série $\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^3 u_{\mathrm{R},k} u_{\mathrm{R},k-1}}$.

La définition 1.2 s'interprète en termes de fractions continues généralisées. En effet, considérons la récurrence linéaire

$$Y_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)Y_n + n^6 Y_{n-1} = 0. \tag{3}$$

On passe d'une solution de (1) à une solution de (3), et réciproquement, en posant $Y_n = n!^3 y_n$. Si $U_{\mathrm{R},n}$ et $V_{\mathrm{R},n}$ sont ainsi associées à $u_{\mathrm{R},n}$ et $v_{\mathrm{R},n}$, alors $\frac{V_{\mathrm{R},n}}{U_{\mathrm{R},n}} = \frac{v_{\mathrm{R},n}}{u_{\mathrm{R},n}}$ est la n-ième réduite de la fraction continue généralisée

$$\zeta(3) = \frac{6|}{|5} - \frac{1|}{|117} - \frac{64|}{|535} - \cdots - \frac{n^6|}{|34n^3 + 51n^2 + 27n + 5} - \cdots.$$

On peut trouver cette formule grâce à un procédé général ([Ap2], [BO], [Ze2]) qui accélère la convergence d'un développement en fraction continue généralisée. Ce procédé s'applique, en particulier, au développement dont les réduites sont les sommes partielles de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$, où f est un polynôme sans zéro parmi les entiers strictement positifs.

En utilisant cette méthode d'accélération de convergence, André-Jeannin a démontré [AnJ] que la somme des inverses des nombres de Fibonacci est irrationnelle (voir aussi [BV] et [Pr2]).

1.2. Formules explicites

DÉFINITION 1.4. — *Soient $(u_{\mathrm{E},n})$ et $(v_{\mathrm{E},n})$ les suites définies par les formules suivantes :*

$$u_{\mathrm{E},n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

$$v_{\mathrm{E},n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \right)$$