Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58$^{\mathrm{e}}$ année, 2005-2006, n$^{\mathrm{o}}$ 952, p. 1 à 31

COMPACTIFICATION DE L'ESPACE DES MODULES DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES [d'après V. Alexeev]

par **Michel BRION**

INTRODUCTION

Classiquement, les variétés abéliennes complexes de dimension g munies d'une polarisation principale sont paramétrées par le quotient A_g du demi-espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ sous l'action du groupe symplectique entier $\mathrm{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$. L'espace des modules A_g est un espace analytique complexe de dimension $g(g+1)/2$ n'ayant que des singularités quotient par des groupes finis. En fait, A_g est un ouvert de Zariski d'une variété projective $\overline{\mathrm{A}}_g^{\min}$ (construite par Satake, Baily et Borel dans le cadre plus général des espaces localement symétriques) : la compactification minimale, dont le bord est de codimension g. La variété $\overline{\mathrm{A}}_g^{\min}$ est en général bien plus singulière que A_g , mais on en connaît des désingularisations partielles : les compactifications toroïdales (construites pour les espaces localement symétriques par Ash, Mumford, Rapoport et Tai) dont le bord est un diviseur, et qui n'ont que des singularités quotient par des groupes finis.

Toutes ces compactifications de A_g admettent des modèles sur les entiers, les compactifications arithmétiques de Faltings et Chai. Cependant, elles sont construites par des procédés ad hoc qui n'en donnent pas d'interprétation modulaire, à savoir, comme espaces de paramètres d'objets géométriques (ce sens de l'adjectif « modulaire » est sans rapport avec les formes modulaires, qui ont des liens étroits avec la compactification minimale).

Des exemples importants de variétés abéliennes principalement polarisées sont les jacobiennes des courbes algébriques irréductibles, lisses et complètes de genre $g \geq 2$. Ces courbes admettent un espace des modules M_g dont on connaît cette fois une compactification modulaire $\overline{\mathrm{M}}_g$, paramétrant les courbes stables de genre arithmétique g. En associant à chaque courbe sa jacobienne, on obtient un morphisme $\mathfrak{t} : \mathrm{M}_g \to \mathrm{A}_g$ qui est injectif d'après le théorème de Torelli ; de plus, M_g, $\overline{\mathrm{M}}_g$ et $\mathfrak{t}$ admettent des modèles entiers. La question se pose alors de construire une compactification modulaire et canonique de A_g, définie sur les entiers et qui permette de compactifier le morphisme de Torelli $\mathfrak{t}$.

Les travaux [2–4] d'Alexeev apportent une réponse complète à cette question. Sa compactification $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ est un espace des modules de « couples quasi-abéliens stables » ; il s'agit des couples (X, D) où X est une variété projective (connexe, mais non nécessairement irréductible) dans laquelle une variété semi-abélienne G opère avec un nombre fini d'orbites, et D est un diviseur effectif et ample sur X qui ne contient aucune de ces orbites. On suppose de plus que X est équidimensionnelle de dimension g et semi-normale (c'est une petite restriction sur ses singularités) et que les stabilisateurs de l'action de G sont des tores.

L'exemple le plus simple d'un tel couple est formé d'une variété abélienne opérant dans elle-même par translations, et d'un diviseur thêta. Un exemple plus singulier est celui où X est une cubique plane nodale munie de l'action du groupe multiplicatif G et du diviseur D formé d'un point distinct du point double ; c'est une dégénérescence des cubiques planes lisses munies d'un point, c'est-à-dire des courbes elliptiques.

À tout couple quasi-abélien stable on peut associer un complexe de polytopes convexes entiers appelé son type. Les couples dont le type est un « pavage périodique par des polytopes convexes entiers » d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^r$, $r \leq g$, sont paramétrés par la compactification modulaire $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$. Parmi ces couples, on trouve ceux associés comme précédemment aux variétés abéliennes principalement polarisées (c'est le cas où $r = 0$), et aussi les jacobiennes compactifiées des courbes stables de genre arithmétique g. Ceci permet d'obtenir un morphisme de Torelli compactifié $\bar{\mathfrak{t}} : \overline{\mathrm{M}}_g \to \overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$; son image est contenue dans l'adhérence de A_g, une composante irréductible de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ dont la normalisation est une compactification toroïdale particulière, notée $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{Vor}}$.

En général, $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ contient d'autres composantes irréductibles [2] ; autrement dit, ce n'est pas une compactification de A_g au sens usuel. Une description modulaire de la « composante principale » $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{Vor}}$ est proposée par Olsson [21] en termes de géométrie logarithmique ; plus généralement, Olsson obtient une compactification canonique des espaces $\mathrm{A}_{g,d}$ qui paramètrent les variétés abéliennes de dimension g munies d'une polarisation de degré $d \geq 2$. Mais la construction d'une compactification modulaire des espaces $\mathrm{A}_{g,d,n}$ (où on se donne aussi une structure de niveau n) est une question ouverte.

La définition des couples quasi-abéliens stables semble assez arbitraire : pourquoi faudrait-il s'intéresser à des objets aussi singuliers ? En fait, la construction d'espaces des modules de variétés projectives et lisses fait apparaître des objets très analogues : afin de pouvoir considérer de telles variétés X dont la classe canonique K_X n'est pas ample (par exemple, les variétés abéliennes pour lesquelles K_X est triviale), on est amené à introduire des couples (X, D) où D est un diviseur effectif sur X tel que $K_X + D$ est ample. Et pour obtenir des espaces des modules complets, il faut autoriser des dégénérescences singulières de ces couples en des « couples stables ».

Les courbes stables pointées forment le premier exemple de tels couples ; d'autres exemples importants sont les surfaces stables de [11]. Dans le manuscrit [1], Alexeev formule une définition générale des couples stables, et montre que l'existence d'un espace des modules complet pour ceux-ci se déduit d'un ensemble de conjectures dans la classification des variétés algébriques : le programme de Mori logarithmique. Ces conjectures sont toujours ouvertes en grande dimension, et la construction de $\overline{\mathrm{A}}_g^{\mathrm{mod}}$ s'obtient par des méthodes spécifiques liées aux symétries des variétés considérées.

Le but de ce texte est d'exposer une partie des résultats des articles [2–5] avec des prérequis modestes de géométrie algébrique (par exemple, le contenu du manuel [9]), dans l'espoir de rendre plus accessible un sujet où foisonnent les notations, les définitions et les concepts. C'est pourquoi on rassemble dans la première partie des résultats classiques sur les variétés abéliennes et leurs espaces des modules, tirés des ouvrages [8, 13, 15]. La seconde partie est consacrée à une construction de dégénérescences « maximales » de variétés abéliennes, qui fait apparaître beaucoup d'ingrédients de la compactification modulaire. Celle-ci fait l'objet de la troisième partie ; on y décrit la structure des couples stables qu'elle classifie et on énonce les résultats principaux la concernant, en général sans démonstration détaillée.

Je remercie R. Bacher, O. Debarre, S. Druel et tout particulièrement V. Alexeev et G. Rémond pour des discussions très utiles et pour leurs commentaires sur les versions successives de ce texte ; il va de soi que je suis seul responsable des erreurs et imprécisions qui pourraient y subsister.

1. VARIÉTÉS ABÉLIENNES PRINCIPALEMENT POLARISÉES ET LEURS ESPACES DES MODULES

Dans tout ce texte, on appelle *variété* un schéma réduit, connexe, séparé et de type fini sur un corps algébriquement clos k ; avec cette convention, les variétés ne sont pas nécessairement intègres. On appelle *courbe* une variété de dimension pure 1. Enfin, on identifie chaque faisceau inversible au fibré en droites dont il est le faisceau des sections locales.

1.1. Variétés abéliennes

Une variété complète est dite *abélienne* si elle est munie d'une structure de groupe algébrique. Une telle variété A est intègre, projective et lisse, et sa loi de groupe est commutative ; on la note additivement. De plus, la structure de groupe sur la variété A est uniquement déterminée par la donnée de l'élément neutre 0. Pour tout $a \in A$, on note

$$\tau_a : A \to A, \quad x \mapsto x + a$$

la translation par a.

Le sous-groupe du groupe de Picard de A formé des classes d'isomorphie des fibrés algébriquement équivalents au fibré trivial est noté $\mathrm{Pic}^0(A)$ ou $A^\vee$; c'est aussi une variété abélienne, la *duale* de A. Tout homomorphisme de variétés abéliennes $f : A \to B$

définit un homomorphisme dual $f^\vee : B^\vee \to A^\vee$, la restriction de $f^* : \mathrm{Pic}(B) \to \mathrm{Pic}(A)$.

Soit L un fibré en droites sur A. Pour tout $a \in A$, le fibré en droites $L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)$ est algébriquement trivial ; on obtient ainsi un morphisme

$$\lambda_L : A \to A^\vee, \quad a \mapsto [L^{-1} \otimes \tau_a^*(L)]$$

qui est en fait un homomorphisme de groupes d'après le *théorème du carré*

$$L \otimes \tau_{a+b}^*(L) \simeq \tau_a^*(L) \otimes \tau_b^*(L) \quad \text{pour tous } a, b \in A.$$

Pour que λ_L soit trivial (c'est-à-dire $\tau_a^*(L) \simeq L$ pour tout $a \in A$), il faut et il suffit que $[L] \in \mathrm{Pic}^0(A)$.

Lorsque le fibré en droites L est ample, λ_L est une *isogénie* (à savoir, un homomorphisme de groupes algébriques, surjectif et de noyau fini) et son degré est le carré de $h^0(L) := \dim H^0(A, L)$; de plus, $H^i(X, L) = 0$ pour tout $i \geq 1$. En particulier, A et $A^\vee$ ont la même dimension, notée g, et le degré du fibré en droites ample L est $g!\, h^0(L)$.

Une *polarisation* de A est une isogénie

$$\lambda : A \to A^\vee$$

qui s'écrit sous la forme λ_L pour un fibré en droites ample L ; alors les fibrés en droites M tels que $\lambda = \lambda_M$ ne sont autres que les translatés $\tau_a^*(L)$, $a \in A$. Les classes de ces fibrés dans $\mathrm{Pic}(A)$ forment un translaté de $A^\vee$ noté $\mathrm{Pic}^\lambda(A)$; l'entier positif $h^0(L) = h^0(\tau_a^*(L))$ est appelé le *degré* de la polarisation λ.

Une polarisation $\lambda = \lambda_L$ est dite *principale* si c'est un isomorphisme, c'est-à-dire si $h^0(L) = 1$; autrement dit, $L = \mathcal{O}_A(\Theta)$ pour un diviseur Θ effectif et ample, uniquement déterminé par L, et déterminé à translation près par λ. On dit alors que le couple (A, λ) est une *variété abélienne principalement polarisée*, qu'on abrège en v.a.p.p.

Les variétés abéliennes de dimension 1 ne sont autres que les courbes de genre 1 munies d'un point, qui définit une polarisation principale. En dimension au moins 2, certaines variétés abéliennes n'admettent aucune polarisation principale ; mais toute variété abélienne est isogène à une v.a.p.p.

Étant données deux variétés abéliennes polarisées (A, λ) et (B, μ), un *morphisme* $f : (A, \lambda) \to (B, \mu)$ est un homomorphisme $f : A \to B$ tel que $f^\vee \circ \mu \circ f = \lambda$. Il en résulte que f est fini, et que c'est un isomorphisme lorsque λ et μ ont le même degré. De plus, le groupe des automorphismes $\mathrm{Aut}(A, \lambda)$ est fini et non trivial ; en fait, il contient toujours l'involution $[-1] : a \mapsto -a$.

La classification des v.a.p.p est intimement liée à celles des courbes :

Exemple 1.1. — Soit C une courbe complète et lisse de genre $g := h^1(\mathcal{O}_C) \geq 1$. Soit $J = J(C) := \mathrm{Pic}^0(C)$ sa jacobienne (formée des classes d'équivalence linéaire des diviseurs de degré 0) ; c'est une variété abélienne de dimension g. Le choix d'un point P de C définit un morphisme

$$f : C^{g-1} \to J, \quad (P_1, \dots, P_{g-1}) \mapsto P_1 + \cdots + P_{g-1} - (g-1)P$$

dont l'image est un diviseur irréductible Θ de J ; un autre choix de P fournit un translaté de Θ, et ces diviseurs définissent une polarisation principale θ de J. D'après le théorème de Torelli, la classe d'isomorphie de la courbe C est uniquement déterminée par celle de la v.a.p.p (J, θ).

1.2. L'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées

Pour définir précisément cet espace qui paramètre les classes d'isomorphie des v.a.p.p de dimension donnée, on a besoin de quelques notions de nature schématique.

Tous les schémas considérés sont supposés localement noethériens. Un *schéma en groupes* sur un schéma de base S est un S-schéma $\pi : \mathcal{G} \to S$ muni de S-morphismes $\mu : \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (la multiplication), $\varepsilon : S \to \mathcal{G}$ (l'élément neutre) et $\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ (l'inverse) qui vérifient les axiomes des groupes.

Un *schéma abélien* sur S est un schéma en groupes $\pi : \mathcal{A} \to S$ propre, lisse et à fibres géométriques connexes (c'est-à-dire $\mathcal{A}_{\bar{s}} := \mathcal{A} \times_S \operatorname{Spec} \kappa(\bar{s})$ est connexe pour tout point s de S, où $\kappa(\bar{s})$ désigne une clôture algébrique du corps résiduel $\kappa(s)$). Chaque fibre géométrique $\mathcal{A}_{\bar{s}}$ est une variété abélienne sur $\kappa(\bar{s})$; on peut voir $\mathcal{A}$ comme une famille de variétés abéliennes paramétrée par la base S. La loi de groupe μ est commutative et uniquement déterminée par la section nulle ε. Lorsque S est le spectre d'un corps K, on dit aussi que $\mathcal{A}$ est une variété abélienne sur K.

Tout schéma abélien $\pi : \mathcal{A} \to S$ admet un *dual* $\mathcal{A}^\vee = \mathbf{Pic}^0(\mathcal{A}/S)$; c'est un schéma abélien sur S, dont chaque fibre géométrique est la duale de la fibre géométrique correspondante de $\mathcal{A}$ [8, Sec.I.1.9]. Une *polarisation* est un morphisme $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^\vee$ de schémas en groupes sur S, qui induit une polarisation $\lambda_{\bar{s}} : \mathcal{A}_{\bar{s}} \to \mathcal{A}_{\bar{s}}^\vee$ pour tout point géométrique $\bar{s}$. Le degré de $\lambda_{\bar{s}}$ est constant sur toute composante connexe de S. La polarisation est *principale* si ce degré est 1, c'est-à-dire si λ est un isomorphisme. On dit alors que le couple $(\mathcal{A}, \lambda)$ est un *schéma abélien principalement polarisé*, abrégé en s.a.p.p.

Parmi les s.a.p.p de dimension relative $g \geq 1$ fixée, il n'existe aucun schéma *universel*, dont tout autre s.a.p.p s'obtient par un unique changement de base ; en effet, comme on l'a vu, les v.a.p.p admettent des automorphismes non triviaux. On dit que les s.a.p.p n'ont pas d'*espace des modules fin*. Cependant, il existe un schéma A_g qui est la meilleure approximation schématique de la base d'un objet universel, et dont les points sur k ne sont autres que les classes d'isomorphie des v.a.p.p.

Plus précisément, considérons le foncteur contravariant $\mathcal{A}_g$ de la catégorie des schémas vers celle des ensembles, qui à tout schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphie (dans un sens évident) des s.a.p.p de dimension relative g sur S.