Séminaire BOURBAKI Mars 2006
58e année, 2005-2006, nO 958, p. 137 à 176

ESPACES ANALYTIQUES p-ADIQUES AU SENS DE BERKOVICH

par **Antoine DUCROS**

INTRODUCTION

Le but de ce texte est de présenter les fondements, ainsi qu'un certain nombre d'applications, d'une théorie qu'a proposée voici quinze ans Vladimir Berkovich ([6], [7], cf. aussi [12]), et qui a constitué un nouveau point de vue sur la *géométrie analytique ultramétrique.* Commençons par expliquer succinctement en quoi consiste cette dernière, par évoquer les problèmes qui surgissent naturellement lorsqu'on l'aborde, et par décrire dans les grandes lignes différentes approches (celle de Tate, celle de Raynaud, et plus récemment donc celle de Berkovich) qui permettent de les contourner.

Une valeur absolue $|.|$ sur un corps k est dite *ultramétrique* si $|a+b| \leq \max(|a|,|b|)$ pour tout couple (a,b) d'éléments de k ; dans ce cas $|a+b| = \max(|a|,|b|)$ dès que $|a|$ et $|b|$ diffèrent. Un *corps ultramétrique* est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique. Les boules fermées de rayon non nul sont des parties ouvertes d'un tel corps ; la topologie dont il hérite est donc totalement discontinue, et ce indépendamment de son éventuelle complétude. Si k est un corps ultramétrique, on désignera par k^o (resp. k^{oo}) le sous-ensemble de k formé des éléments de valeur absolue inférieure ou égale (resp. strictement inférieure) à 1. Il est immédiat que k^o est un sous-anneau de k dont k^{oo} est l'unique idéal maximal. Le quotient, souvent appelé *corps résiduel de* k, sera noté $\widetilde{k}$.

Dans toute la suite on s'intéressera la plupart du temps à des corps ultramétriques *complets.* Le prototype d'un tel objet est le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, où p est un nombre premier donné. Rappelons brièvement sa construction : pour tout rationnel r non nul, il existe un unique entier relatif $v_p(r)$ tel que r puisse s'écrire $p^{v_p(r)}a/b$ avec a et b premiers à p. On choisit[(1)] un réel ε dans l'intervalle $]0;1[$, et l'on munit $\mathbb{Q}$ de

(1) Rien de ce qui suit ne dépend de ce choix. Il est fréquent de prendre ε égal à $1/p$; cette normalisation a l'avantage d'être compatible avec l'effet de la multiplication sur la mesure de Haar de $\mathbb{Z}_p$, et de donner lieu, lorsqu'on l'adopte pour *chacun* des nombres premiers, à la « formule du produit » : si x appartient à $\mathbb{Q}^*$ le produit de toutes ses valeurs absolues (les p-adiques et la traditionnelle) est alors égal à 1.

la valeur absolue qui envoie tout élément r de $\mathbb{Q}^*$ sur $\varepsilon^{v_p(r)}$. Elle est ultramétrique, et on appelle $\mathbb{Q}_p$ le complété correspondant de $\mathbb{Q}$. Un élément de $\mathbb{Q}_p$ a une unique écriture de la forme $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i p^i$ où les a_i appartiennent à $\{0,1,\ldots,p-1\}$ et sont nuls *en dessous* d'un certain rang ; les opérations se font à l'aide de l'algorithme habituel, avec retenues. L'anneau $\mathbb{Q}_p^o$ est simplement noté $\mathbb{Z}_p$ et s'identifie à $\{\sum_{i\geq 0} a_i p^i\}$; son idéal maximal est $\{\sum_{i>0} a_i p^i\}$ et le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{Q}_p}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{F}_p$. Le groupe $|\mathbb{Q}_p^*|$ est égal à $\varepsilon^{\mathbb{Z}}$. L'anneau $\mathbb{Z}_p$ est compact par un argument séquentiel élémentaire ; il en découle que $\mathbb{Q}_p$ est localement compact.

Soit $\overline{\mathbb{Q}_p}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. La valeur absolue de ce dernier s'y prolonge de manière unique, mais $\overline{\mathbb{Q}_p}$ n'est pas complet, comme on peut (par exemple) le déduire du théorème de Baire ; son complété $\mathbb{C}_p$ reste par contre algébriquement clos. C'est en quelque sorte l'analogue p-adique du corps $\mathbb{C}$ auquel il est d'ailleurs abstraitement isomorphe, puisque tous deux ont même degré de transcendance sur $\mathbb{Q}$, à savoir la puissance du continu. Le groupe $|\mathbb{C}_p^*|$ est égal à $\varepsilon^{\mathbb{Q}}$, et $\widetilde{\mathbb{C}_p}$ est une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}_p}$ de $\mathbb{F}_p$. Notons que $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact. Pour le voir, il suffit de montrer que $\mathbb{C}_p^o$ n'est pas compact. Or il est la réunion disjointe des $\pi^{-1}(\lambda)$, où λ parcourt $\overline{\mathbb{F}_p}$ et où π est la flèche quotient ; et pour tout λ appartenant à $\overline{\mathbb{F}_p}$ le sous-ensemble $\pi^{-1}(\lambda)$ de $\mathbb{C}_p^o$ est une boule unité ouverte (dont n'importe quel élément de $\pi^{-1}(\lambda)$ est un centre), d'où la conclusion.

Le rôle majeur joué en théorie des nombres et en géométrie arithmétique par les corps p-adiques a incité à développer sur ces derniers, autant que faire se pouvait, une théorie analogue à celle des espaces analytiques complexes. Partons plus généralement d'un corps ultramétrique complet k. Les notions classiques de fonction développable en série entière ou de rayon de convergence gardent un sens sur k et s'y comportent bien, voire d'une certaine manière mieux que sur $\mathbb{C}$: en effet une série à valeurs dans k converge *si et seulement si son terme général tend vers zéro.* On peut dès lors donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément $\sum a_I \mathbf{T}^I$ de $k[[\mathbf{T}]]$, où $\mathbf{T}$ désigne une famille finie d'indéterminées, converge sur le polydisque unité *fermé* $\mathbf{D}$ de dimension correspondante : il faut et il suffit que $|a_I|$ tende vers zéro lorsque la longueur $|I|$ du multi-indice I tend vers l'infini. Cette remarque explique le rôle central que jouent en géométrie analytique ultramétrique, et ce quel que soit le point de vue adopté, les lieux de zéros de fonctions analytiques sur un polydisque fermé ; un espace isomorphe à un tel lieu sera qualifié d'*affinoïde.*

Malgré ces débuts plutôt favorables, le bât blesse très rapidement en raison de la totale discontinuité de k. Ainsi sa boule unité fermée étant ouverte, la fonction indicatrice correspondante est localement constante, et *a fortiori* localement développable en série entière sur k ; or il est clair qu'elle ne saurait, en aucun sens raisonnable, être considérée comme globalement analytique.

L'approche de Tate : la géométrie rigide ([62], cf. aussi [16]). — Sur un espace analytique complexe, on considère une propriété comme étant de nature locale lorsqu'il suffit de la tester sur un recouvrement ouvert. La transposition telle quelle de cette définition au cadre ultramétrique conduit, comme on vient de le signaler, à des aberrations ; l'idée de Tate a consisté à la modifier, en se restreignant à une classe particulière de recouvrements ouverts qu'il qualifie d'*admissibles.* Le cadre théorique utilisé pour ce faire est celui des *topologies de Grothendieck*, qui reposent précisément sur l'axiomatisation de la notion de recouvrement. Sans entrer dans les détails techniques, indiquons qu'un recouvrement est admissible lorsque, moralement, il y a suffisamment de chevauchement entre les ouverts qui le constituent pour que les conditions de coïncidence sur les intersections soient significativement contraignantes ; l'écriture de k comme réunion disjointe de k^o et de son complémentaire est l'exemple typique à exclure.

Les objets de la théorie de Tate, appelés *espaces analytiques rigides sur le corps k*, sont ainsi des espaces topologiques totalement discontinus sur lesquels on distingue certaines familles d'ouverts, dont on dit qu'elles forment un recouvrement admissible de leur réunion. On sait définir les fonctions analytiques sur ces espaces, et elles se recollent parfaitement pourvu qu'on se limite aux recouvrements admissibles. Par ailleurs tout espace analytique rigide possède un recouvrement admissible par des espaces affinoïdes(2) : ces derniers sont en quelque sorte les « briques élémentaires » de la géométrie rigide, celles sur lesquelles tout est modelé.

L'approche de Raynaud : les schémas formels à éclatement près ([19]–[22], [56])

Indépendamment de sa nature précise, un espace analytique rigide est d'après ce qui précède défini localement par des équations analytiques à coefficients dans k. Raynaud part quant à lui d'un système d'équations analytiques (comprenant d'éventuelles données de recollement) *à coefficients dans k^o*. On peut les réduire modulo k^{oo}, et en raison de leur convergence on obtient ainsi des *polynômes* sur le corps $\widetilde{k}$. Bien entendu, pour que cette opération présente quelque intérêt, le système de départ doit être choisi convenablement : si par exemple on multiplie toutes les équations par un élément de k^{oo}, leurs réductions deviennent nulles et on ne pourra pas espérer en tirer quoi que ce soit.

Techniquement, la notion de « système convenable d'équations analytiques à coefficients dans k^o » se traduit par *schéma formel plat et topologiquement de présentation finie sur k^o*. Un tel schéma formel possède une *fibre spéciale*, à savoir la variété algébrique sur $\widetilde{k}$ obtenue par réduction modulo k^{oo} des équations qui le définissent, et une *fibre générique* qui n'est autre que l'espace analytique rigide sur k donné par les équations en question. Tout espace analytique rigide qui est réunion d'un nombre fini

(2) Un tel espace, on l'a vu, est *défini* par un système d'équations analytiques S à coefficients dans k ; dans l'approche de Tate il *consiste* précisément en l'ensemble des solutions de S *dans une clôture algébrique $\overline{k}$ de k* quotienté par l'action de Galois.

d'espaces affinoïdes[3] est isomorphe à la fibre générique d'un schéma formel convenable, et les fibres génériques de deux schémas formels donnés sont isomorphes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par une suite d'éclatements et de contractions formels ; le remplacement sur $\mathbb{Z}_p$ d'une indéterminée x par x/p est un exemple de telle transformation. C'est sur ces théorèmes que se fonde le point de vue de Raynaud ; il consiste à travailler dans la catégorie des schémas formels plats et de présentation finie sur k^o *en décrétant inversibles les éclatements formels*[4]. Les recouvrements admissibles de Tate se retrouvent naturellement dans le cadre proposé par Raynaud, où ils correspondent *grosso modo* aux recouvrements *de Zariski* des fibres spéciales.

L'approche de Berkovich. — On peut la décrire sommairement en disant qu'il « rajoute des points » aux espaces rigides classiques, et qu'il obtient de ce fait de bien meilleures propriétés topologiques. En un sens, ce changement de point de vue s'apparente à celui opéré lorsqu'on adjoint à l'ensemble des points « classiques » d'une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos un point générique par fermé irréductible de dimension strictement positive : la complication apparente initiale est compensée par la souplesse et les commodités qu'offre le nouveau cadre.

Les espaces de Berkovich présentent ainsi l'avantage d'être localement compacts et localement connexes par arcs, et les fonctions analytiques s'y recollent sans qu'il y ait besoin de se limiter à des recouvrements particuliers. Par ailleurs ils vérifient toutes les propriétés qui doivent « moralement » l'être : dans cette théorie les polydisques fermés, et plus généralement les affinoïdes, sont compacts ; les objets qui ont *intuitivement* « un bord », tels là encore les polydisques fermés, en ont *effectivement* un dans ce cadre, mais dans un sens à préciser et qui n'est pas purement topologique ; l'espace analytique $\mathscr{X}^{an}$ associé à une variété algébrique $\mathscr{X}$ est sans bord, et il est connexe (resp. séparé, resp. compact) si et seulement si $\mathscr{X}$ est connexe (resp. séparée, resp. propre). Signalons que contrairement à ce qui se passe dans le cas complexe, la dimension topologique de $\mathscr{X}^{an}$ est égale à la dimension de Krull de $\mathscr{X}$, et non à son double. Si $\mathscr{X}$ est propre le type d'homotopie de $\mathscr{X}^{an}$ reflète en partie les propriétés de la « réduction modulo k^{oo} » de $\mathscr{X}$; par exemple, si k est algébriquement clos et si $\mathscr{X}$ est une courbe elliptique alors $\mathscr{X}^{an}$ est contractile (resp. homotope à un cercle) si et seulement si $\mathscr{X}$ a bonne (resp. mauvaise) réduction.

Inventée à l'origine pour des motivations liées à la théorie spectrale, la théorie de Berkovich s'est révélée extrêmement féconde ; on lui doit un grand nombre d'applications dans des domaines variés. Elle a ainsi notamment permis :

- de démontrer une conjecture de Deligne sur les cycles évanescents ;

[3] Il faut en outre le supposer *quasi-séparé*.

[4] Un sens rigoureux peut être donné à cette expression à l'aide de la notion de localisation d'une catégorie par une famille de flèches.

• de démontrer une conjecture de Carayol et Drinfeld sur les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales ;

• de développer une variante p-adique de la théorie des « dessins d'enfants » ;

• de développer une théorie de l'intégration p-adique des 1-formes fermées sur de *vrais* chemins ;

• de faire de l'analyse harmonique et des systèmes dynamiques sur les corps p-adiques, et d'y formuler et démontrer des théorèmes d'équidistribution ;

• d'exhiber des analogues p-adiques de résultats connus de géométrie réelle, telles les propriétés de base des parties semi-algébriques ou la description purement topologique de certains groupes de cohomologie étale.

Avant d'entamer une présentation détaillée de la théorie de Berkovich et un survol de ses applications, mentionnons l'existence de deux autres approches de la géométrie analytique ultramétrique, sur lesquelles nous ne nous étendrons malheureusement guère, *faute de connaissances et de compétences suffisantes.* La première est due à Huber (cf. [48]) ; ses espaces ont « encore plus de points » que ceux de Berkovich puisqu'il prend en compte *toutes* les valuations et pas seulement celles de hauteur 1 ; le *plus grand quotient séparé* d'un espace affinoïde au sens de Huber est ainsi l'espace de Berkovich correspondant. La seconde est en cours de développement : un ouvrage de Fumiharu Kato et Kazuhiro Fujiwara sur le sujet est en préparation(5).

Je tiens à remercier Antoine Chambert-Loir pour ses remarques, conseils et suggestions concernant une première version de ce texte.

1. DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

1.1. Algèbres affinoïdes

Les énoncés de ce paragraphe et du suivant sont dus à Berkovich. Les démonstrations se trouvent pour l'essentiel (*dans un ordre qui n'est pas forcément celui adopté ici*) *dans les chapitres* 2 *et* 3 *de* [6] *; elles utilisent fréquemment certains résultats de* [16].

Dans ce texte, les normes d'algèbres seront sous-multiplicatives. Si une application a pour source une algèbre normée et est majorée sur sa boule unité (son but étant tel que l'adjectif « majoré » ait un sens), on la qualifiera de *bornée.*

On fixe pour tout le reste du texte un corps ultramétrique complet k (la valeur absolue peut être triviale) ; le sens des notations k^o, k^{oo} et $\widetilde{k}$ a été rappelé dans l'introduction. On va travailler avec la catégorie dont les objets sont les k-algèbres de Banach, et les flèches les applications k-linéaires bornées. Deux normes de Banach sur

(5)Indiquons à ce propos que A. Abbes rédige également en ce moment un livre de géométrie rigide *selon le point de vue de Raynaud* sur une base quelconque.