Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58e année, 2005-2006, n° 953, p. 33 à 53

EXPLOSION POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER AU RÉGIME DU « LOG LOG » [d'après Merle-Raphael]

par **Nicolas BURQ**

INTRODUCTION

On se propose dans cet exposé de présenter quelques résultats récents sur l'explosion pour l'équation de Schrödinger non linéaire :

$$i\frac{\partial}{\partial t}u + \Delta u + |u|^{\frac{4}{d}}u = 0, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+d}, \qquad \Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}. \tag{1}$$

Cette équation apparaît dans plusieurs modèles mathématiques de phénomènes physiques : la propagation d'ondes dans un milieu non linéaire, la propagation dans les fibres optiques ou la condensation de Bose–Einstein (équation de Gross–Pitaevskii). Elle possède (au moins formellement) trois lois de conservation :

– Conservation de la masse

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2}$$

– Conservation de l'énergie

$$E(u)(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2}|\nabla_x u|^2 - \frac{d}{2d+4}|u|^{\frac{2d+4}{d}} \right) dx = E(u)(0). \tag{3}$$

– Conservation du moment cinétique

$$\mathbf{Im}\left(\int \nabla_x u\overline{u}(t,x)dx \right) = \mathbf{Im}\left(\int \nabla_x u\overline{u}(0,x)dx \right). \tag{4}$$

Ces invariants sont reliés aux invariances de l'équation dans l'espace d'énergie H^1 : si $u(t,x)$ est solution de (1) alors

– $u(t_0+t, x_0+x)$ aussi (invariance par translation),
– $u(t,x)e^{i\gamma}$ aussi (invariance de phase),
– $\lambda^{\frac{d}{2}}u(\lambda^2 t, \lambda x)$ aussi (invariance d'échelle),
– $u(t, x-\beta t)e^{i\frac{\beta}{2}\cdot(x-\frac{\beta}{2}t)}, \beta \in \mathbb{R}^d$ aussi (invariance galiléenne).

Une quatrième symétrie peut-être moins évidente (et qui n'agit pas sur H^1) est l'invariance conforme : si $u(t,x)$ est solution de (1) alors il en est de même de

$$v(t,x) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}}\overline{u}\Big(\frac{1}{t},\frac{x}{t}\Big)e^{i\frac{x^2}{4t}}. \tag{5}$$

On peut remarquer que l'application

$$u \mapsto u_\lambda, \qquad u_\lambda(x) = \lambda^{\frac{d}{2}}u(\lambda x)$$

préserve la norme L^2 : l'équation (1) est dite L^2-*critique* (un autre choix de puissance dans la non-linéarité donnerait une autre puissance de λ pour l'invariance d'échelle).

L'équation (1) est un système hamiltonien de dimension infinie. La partie *linéaire* de l'équation, $i\partial_t + \Delta$, possède des propriétés dispersives et un des points importants de l'étude de (1) consiste à comprendre l'interaction entre ces propriétés de dispersion et l'effet de focalisation dû à la non-linéarité. Dans ce contexte des équations dispersives, l'équation de Schrödinger non linéaire est, avec l'équation de Korteveg–de Vries critique (voir les travaux de Martel et Merle [MM00, MM02a, MM02b, MM04] qui ont inspiré le travail de Merle et Raphael et l'exposé au séminaire Bourbaki de Tzvetkov [Tzv05] sur le sujet), un modèle important pour lequel on est capable d'exhiber des solutions *explosives*.

Les questions auxquelles on va s'intéresser dans cet exposé sont les suivantes :

– Existe-t-il des solutions explosives autres que celles (explicites) qui sont connues depuis les années 60 ?
– Peut-on classifier les types d'explosion possibles ?
– Quels types d'explosion sont stables ?

Remerciements. — Je remercie P. Gérard pour les discussions que j'ai eues avec lui sur le sujet de cet exposé et P. Raphael qui a passé du temps à m'expliquer de nombreux points de leur preuve et dont les notes de cours sur le sujet [Rap04] ont été une source d'inspiration.

1. LE CARACTÈRE BIEN POSÉ DANS H^1, CRITÈRES D'EXPLOSION ET DE NON-EXPLOSION

1.1. Non-explosion : normes L^2 petites

Le caractère localement bien posé de (1) pour des données initiales L^2 ou H^1 (norme quelconque) est connu depuis les travaux de Ginibre et Velo [GV79] :

Théorème 1.1. — *Pour tout $C > 0$ il existe $T > 0$ tel que pour toute donnée initiale $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\|u_0\|_{H^1} \leq C$, il existe une unique solution $u \in C([0,T[;H^1)$ de l'équation (1) vérifiant $u\,|_{t=0} = u_0$.*

On peut remarquer que le temps d'existence de la solution est minoré par une fonction de la norme H^1 de la donnée initiale. Si on note T le temps maximal d'existence on a ainsi, si $T < +\infty$

$$\lim_{t \to T-0} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

On dit qu'on a *explosion* en temps fini de la solution. On peut aussi avoir explosion en temps infini si

$$T = +\infty \text{ et } \limsup_{t \to +\infty} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty.$$

Pour des données initiales petites dans L^2, la solution est globale en temps : ceci est une conséquence facile de l'inégalité de Gagliardo–Nirenberg suivante :

Proposition 1.2. — *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, on a*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{\frac{4}{d}+2} dx \leq C \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx \left(\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}}.$$

En effet, on déduit de l'inégalité précédente que si la norme L^2 de la donnée initiale (et donc de la solution d'après (2)) est petite, alors

$$E(u(t)) \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t)|^2 dx$$

donc notre solution reste bornée dans H^1 (compte tenu de la conservation de la norme L^2) et $T = +\infty$.

On peut préciser la condition « norme L^2 petite » (voir Weinstein [Wei83]).

Proposition 1.3. — *On considère le problème de minimisation suivant :*

$$m = \inf_{0 \neq v \in H^1} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 dx \right)^{\frac{2}{d}}}{\int_{\mathbb{R}^d} |v|^{\frac{4}{d}+2} dx}.$$

Alors m est atteint pour la famille à trois paramètres de fonctions

$$\lambda^{\frac{d}{2}} Q(\lambda x + x_0) e^{i\gamma}, \qquad (\lambda, x_0, \gamma) \in \mathbb{R}^{*,+} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},$$

où Q est l'unique solution positive radiale et exponentiellement décroissante à l'infini du système

$$\Delta Q - Q + Q^{\frac{4}{d}+1} = 0, \qquad Q(r) \to 0, r \to +\infty.$$

(*On appelle Q « l'état fondamental »*).

On en déduit l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg précisée :

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int |\nabla v|^2 \left(1 - \left(\frac{\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \right)^{\frac{4}{d}} \right).$$

On voit immédiatement que si $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, les deux quantités conservées, énergie et masse, impliquent que la norme H^1 reste bornée et donc que la solution existe globalement (en temps) :

Proposition 1.4. — *Pour tout* $u_0 \in H^1$ *telle que* $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, *la solution de* (1) *de donnée initiale* u_0 *existe pour tout temps.*

Remarque 1.5. — On peut également montrer en utilisant les estimations de Strichartz dues dans ce contexte à Ginibre et Velo [GV79] que, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2$, il existe une solution locale en temps de (1) et que la solution est globale ($T = +\infty$) si la norme de la donnée initiale est petite dans L^2. La question de savoir si la borne garantissant l'existence globale est $\|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ (comme au niveau H^1) est ouverte.

1.2. Ondes solitaires et explosion à masse critique

Il est remarquable de constater que non seulement Q fournit un critère de non-explosion, mais qu'il en établit aussi le caractère optimal. En effet, la fonction $e^{it}Q(x)$ (le soliton de l'équation de Schrödinger) est clairement solution de (1). En utilisant l'invariance conforme (5), on peut définir

$$S(t) = \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}} Q(\frac{x}{t}) e^{i\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{4t}\right)},$$

qui est la solution de (1) de donnée initiale à $t = -1$ égale à $Q(x)e^{i\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}$. Alors $S(t)$ vérifie

(1) $E(S(t)) > 0$,
(2) $\|S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$,
(3) $\|\nabla S(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \sim \frac{C}{|t|}$, $t \to 0, t > 0$,
(4) $S(t)$ se concentre en $x = 0$ quand t tend vers 0 : au sens de la convergence faible des mesures,

$$|S(t)|^2 dx \to \|Q\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \delta_{x=0}.$$

En fait ces propriétés caractérisent la fonction $S(t)$.

Théorème 1.6 (Merle [Mer93]). — *Soit* $u_0 \in H^1$ *telle que* $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$. *On suppose que la solution de* (1) *explose en temps fini. Alors aux symétries de translation, phase, dilatation et invariance conforme près,* $u(t,x) = S(t,x)$.

1.3. Explosion à énergie négative

Une question naturelle, compte tenu du théorème 1.6 est de savoir si pour $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > \|Q\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ il existe effectivement des solutions explosives de (1) (et éventuellement de les décrire). Grâce à l'identité du viriel due à Zakharov et Shabat [ZS71],

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int |x|^2 |u(t,x)|^2 dx\right) = 4\frac{d}{dt}\mathbf{Im}\left(\int x \nabla u \overline{u} dx\right) = 16 E_0, \tag{6}$$

on a une première réponse très simple. En effet, on peut alors vérifier que si la donnée initiale est dans l'espace du viriel

$$\Sigma = \{u \in H^1; xu \in L^2\},$$

alors la solution reste dans cet espace tant qu'elle existe (en tant que solution dans H^1) et vérifie (6). En particulier, si $E_0 < 0$, la solution explose en temps fini (le terme de gauche dans (6) est positif mais a une dérivée seconde constante strictement négative). Cet argument a pu être généralisé au cadre de données initiales qui ne sont plus dans Σ mais seulement dans H^1 :

THÉORÈME 1.7. — *Soit* $u_0 \in H^1$ *telle* $E_0 < 0$*. Alors la solution de* (1) *de donnée initiale* u_0 *explose en temps fini si*

(1) $d = 1$ (*Ogawa, Tsutsumi* [OT91]) *ou*
(2) $d \geq 2$ *et* u_0 *est radiale* (*Nawa* [Naw99]).

Un inconvénient majeur de ce résultat est qu'il fournit juste une obstruction à l'existence globale. Il ne dit rien sur l'explosion proprement dite ni sur le comportement de la solution.

1.4. Solutions auto-similaires

Compte tenu de l'invariance par changement d'échelle de l'équation, il est naturel de chercher des solutions sous la forme

$$U_b(t,x) = \frac{1}{(2b(T-t))^{\frac{4}{d}}} Q_b\left(\frac{x}{\sqrt{2b(T-t)}}\right) e^{-i\frac{\log(T-t)}{2b}}$$

avec Q_b solution de

$$\Delta Q_b - Q_b + ib\left(\frac{d}{2}Q_b + y\cdot\nabla Q_b\right) + Q_b|Q_b|^{\frac{4}{d}} = 0.$$

De telles solutions ne sont jamais dans L^2 à cause d'une divergence de type logarithmique à l'infini :

$$|Q_b(x)| \sim \frac{C(b)}{|x|^{\frac{d}{2}}}, \qquad |x| \to +\infty.$$

Néanmoins ces solutions joueront un rôle important dans la suite.

Un autre résultat (élémentaire) relié à cette invariance par changement d'échelle est le suivant :

PROPOSITION 1.8. — *On considère* u *une solution de* (1) *de donnée initiale* $u_0 \in H^1$ *et explosant en temps fini,* T*. Alors il existe* $C > 0$ (*ne dépendant que de* $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$) *tel que*

$$\forall t \in [0,T[, \qquad \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq \frac{C}{\sqrt{T-t}}. \tag{7}$$