Séminaire BOURBAKI Novembre 2005
58[e] année, 2005-2006, n[o] 955, p. 75 à 98

GENRES DE TODD ET VALEURS AUX ENTIERS DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS L

par **Christophe SOULÉ**

Le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch calcule la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un fibré holomorphe E sur une variété complexe X projective et lisse :

$$\chi(E) = \int_X \operatorname{ch}(E)\,\operatorname{Td}(TX)\,. \tag{1}$$

Dans cette identité le genre de Todd $\operatorname{Td}(\cdot)$ est la classe caractéristique multiplicative associée à la série formelle

$$\operatorname{Td}(x) = \frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + \cdots\,,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\operatorname{Td}(x) = 1 - \sum_{m\geq 0} \zeta(-m)\,\frac{x^{m+1}}{m!}\,,$$

où $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann. Ce lien entre le genre de Todd et les valeurs aux entiers de la fonction zêta peut paraître fortuit. Mais l'analogue de l'égalité (1) en géométrie d'Arakelov fait intervenir, en plus du genre de Todd classique, la classe caractéristique additive associée à la série

$$R(x) = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ impair}}} \left(2\zeta'(-m) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right)\zeta(-m)\right)\frac{x^m}{m!}\,,$$

où $\zeta'(s)$ est la *dérivée* de la fonction zêta. Et si les nombres rationnels $\zeta(-m)$ (autrement dit les nombres de Bernoulli) apparaissent dans de nombreux calculs, il est par contre très rare de rencontrer les nombres réels $\zeta'(-m)$ avec m impair. Le but de cet exposé est de montrer comment, plus généralement, les avatars du genre de Todd en géométrie d'Arakelov permettent d'obtenir des formules, nouvelles ou déjà connues, impliquant les valeurs aux entiers des dérivées des fonctions L de la théorie des nombres. Si X est un schéma régulier, projectif sur un ouvert du spectre de l'anneau des entiers d'un corps de nombres, muni d'une action du schéma en groupes G des racines n-ièmes de l'unité, $n \geq 1$, Köhler et Roessler ont démontré un analogue équivariant du théorème de Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov. Ce «théorème de Lefschetz arithmétique» [23] comporte aussi une correction au genre de Todd équivariant habituel. Ses coefficients sont donnés par les valeurs aux entiers négatifs de la *dérivée* en s de la fonction zêta de Lerch définie, si $\mathrm{Re}(s) > 1$, par la formule

$$\zeta(z,s) = \sum_{m\geq 1} \frac{z^m}{m^s}\,,\ z\in\mathbb{C}\,,\ |z| = 1\,.$$

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo n, cette fonction est liée à la fonction L de Dirichlet

$$L(\chi,s) = \sum_{m\geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$$

par une transformée de Fourier sur le groupe $(\mathbb{Z}/n)^*$. Par ailleurs, une formule célèbre de Chowla et Selberg (étendue par Gross [19], Anderson [1] et Colmez [12] aux variétés abéliennes de type CM) calcule les périodes d'une courbe elliptique à multiplication complexe à l'aide des dérivées à l'origine des fonctions L de Dirichlet [11].

Köhler et Roessler ont montré que leur théorème de Lefschetz arithmétique fournit une nouvelle preuve des formules de Chowla-Selberg, Gross, Anderson et Colmez (sans retrouver cependant le calcul complet aux «mauvaises places»). Maillot et Roessler [30] ont abordé le cas d'une variété quelconque sur un corps de nombres, munie d'une action de G. Outre les résultats précédents, ils obtiennent un calcul des périodes du groupe $H^2(X)$ quand X est une surface, et $H^d(X)$ quand X est une hypersurface de dimension d. Leur résultat est la première confirmation, en dehors des variétés abéliennes, d'une conjecture de Gross et Deligne sur les motifs à multiplication complexe [19].

Après avoir introduit la géométrie d'Arakelov (§1) et énoncé les théorèmes de Riemann-Roch (§2, Th. 2.1) et de Lefschetz arithmétiques (§3, Th. 3.1), nous montrerons, en suivant [29], que cette formule se simplifie énormément quand on l'applique au complexe de De Rham d'une variété projective et lisse sur un corps de nombres X, munie d'une action de G. Le résultat principal (§4, Th. 4.4) est une réécriture de la transformée de Fourier de l'identité initiale. Il affirme qu'une certaine combinaison de logarithmes de périodes de X est un multiple entier explicite de $\frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)}$, où χ est un caractère de Dirichlet impair et primitif modulo n. La section 5 détaille ce calcul, et on discute dans la section 6 le cas d'une variété abélienne. On fait alors le lien avec la conjecture de Gross et Deligne et avec la formule de Chowla-Selberg. Il faut toutefois signaler que les égalités ainsi obtenues ne sont pas aussi précises qu'on le souhaiterait. Elles souffrent en effet d'une ambiguïté, due au fait que le complexe de De Rham ne s'étend pas en général, de façon équivariante, à un modèle entier de X. L'appendice donne par contre un exemple d'une courbe elliptique de type CM pour laquelle la méthode fournit un résultat sans cette ambiguïté.

Pour terminer, nous évoquerons brièvement d'autres travaux reliant la géométrie d'Arakelov aux valeurs des dérivées de fonctions L, y compris celles associées aux formes modulaires [30] [25] [26]. C'est un domaine en plein essor.

Je tiens à remercier Maillot et Roessler pour m'avoir beaucoup aidé à préparer cet exposé. L'exemple traité en appendice leur est dû. Je remercie aussi Burgos et Kudla pour leurs commentaires sur ce manuscrit.

Notation : si M est un groupe abélien et si K est un corps, on notera M_K le K-espace vectoriel $M \otimes_{\mathbb{Z}} K$.

1. GÉOMÉTRIE D'ARAKELOV

Dans cette section et la suivante nous décrivons les principales notions de la géométrie d'Arakelov. Pour des exposés de synthèse plus détaillés, voir [36] [35] [4] et l'exposé [8] de ce séminaire.

1.1. Appelons *variété arithmétique* la donnée d'un schéma X régulier et projectif sur $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. La conjugaison des coordonnées munit l'ensemble $X(\mathbb{C})$ des points complexes de X d'une involution $F_\infty : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$. Pour un entier $p \geq 0$ on note $Z^p(X)$ le groupe des cycles algébriques de codimension p sur X, i.e. les combinaisons formelles finies $\sum\limits_{\alpha} n_\alpha\, Z_\alpha$, $n_\alpha \in \mathbb{Z}$, où les $Z_\alpha \subset X$ sont des fermés de codimension p dans X. On note aussi $D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ (resp. $A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$) l'espace vectoriel réel des courants réels (resp. des formes différentielles réelles) de type (p,p) sur $X(\mathbb{C})$ sur lesquel(le)s F_∞^* agit par multiplication par $(-1)^p$. Un *courant de Green* pour le cycle $Z \in Z^p(X)$ est un élément g de $D^{p-1,p-1}(X_{\mathbb{R}})$ tel que

$$dd^c g + \delta_Z = \omega\,, \tag{2}$$

où $\omega \in A^{pp}(X_{\mathbb{R}})$, $\delta_Z \in D^{pp}(X_{\mathbb{R}})$ est le courant d'intégration sur les points complexes de Z , et $dd^c = \frac{i}{2\pi}\,\partial\bar\partial$. Le *groupe de Chow arithmétique* $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$ est engendré par les couples (Z,g), où $Z \in Z^p(X)$ et g est un courant de Green de Z. On a $(Z,g)+(Z',g') = (Z+Z', g+g')$ et on impose les relations

$$(\mathrm{div}(f), -\log|f|^2 + \partial u + \bar\partial v) = 0$$

dans $\widehat{\mathrm{CH}}^p(X)$, où u (resp. v) est un courant de type $(p-2,p-1)$ (resp. $(p-1,p-2)$) et $f \in k(Y)^*$ est n'importe quelle fonction rationnelle non nulle sur un sous-schéma fermé intègre $Y \subset X$ de codimension $p-1$. Le cycle $\mathrm{div}(f)$ est le diviseur de f et $-\log|f|^2$ est le courant obtenu en associant à toute forme différentielle sur $X(\mathbb{C})$ l'intégrale sur $Y(\mathbb{C})$ de son produit avec la fonction intégrable $-\log|f|^2$.

À tout morphisme algébrique $f : X \to Y$ entre variétés arithmétiques sont associés des morphismes d'image inverse

$$f^* : \widehat{\mathrm{CH}}^p(Y) \to \widehat{\mathrm{CH}}^p(X)\,.$$

De plus, il existe un produit d'*intersection arithmétique*

$$\widehat{\mathrm{CH}}^p(X) \otimes \widehat{\mathrm{CH}}^q(X) \to \widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Ce produit est compatible aux images inverses. On notera qu'au lieu de $\widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$ on peut aussi considérer, et c'est plus naturel, le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel défini de la même façon que $\widehat{\mathrm{CH}}^{p+q}(X)$ mais en prenant pour générateurs les couples (Z, g), où $Z \in Z^{p+q}(X)_{\mathbb{Q}}$ et $g \in D^{p+q-1,p+q-1}(X_{\mathbb{R}})$ est un courant de Green de Z. De même pour les espaces vectoriels $\widehat{\mathrm{CH}}^{p}(X)_K$ utilisés plus loin.

1.2. Un *fibré hermitien* sur X est la donnée d'un couple $\bar{E} = (E, h)$, où E est un fibré algébrique sur X et h une métrique hermitienne C^∞ sur le fibré holomorphe $E_{\mathbb{C}}$ sur $X(\mathbb{C})$ associé à E, cette métrique étant invariante par F_∞. On peut associer à tout fibré hermitien $\bar{E}$ des classes caractéristiques telles que les classes de Chern $\hat{c}_p(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{p}(X)$, le caractère de Chern

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} = \underset{p \geq 0}{\oplus} \widehat{\mathrm{CH}}^{p}(X)_{\mathbb{Q}}$$

et la classe de Todd

$$\widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \,.$$

Si par exemple $\bar{L} = \det(\bar{E})$ est la puissance extérieure maximale de E, la première classe de Chern

$$\hat{c}_1(\bar{E}) = \hat{c}_1(\bar{L}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^{1}(X)$$

est la classe du couple $(\mathrm{div}(s), -\log \|s\|^2)$, où s est n'importe quelle section rationnelle non nulle de s sur X et $\|s\|$ la norme de cette section.

Ces classes caractéristiques vérifient les propriétés usuelles de fonctorialité, normalisation et comportement par produit tensoriel. Si $E = E' \oplus E''$ est la somme directe de deux fibrés algébriques et si la métrique sur $E_{\mathbb{C}}$ est la somme directe orthogonale des métriques sur $E'_{\mathbb{C}}$ et $E''_{\mathbb{C}}$ on a

$$\hat{c}_p(\bar{E}) = \sum_{i+j=p} \hat{c}_i(\bar{E}')\, \hat{c}_j(\bar{E}'') \,,$$

$$\widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}) = \widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}')\, \widehat{\mathrm{ch}}(\bar{E}'') \,,$$

et

$$\widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}) = \widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}')\, \widehat{\mathrm{Td}}(\bar{E}'') \,.$$

Mais ces formules ne sont plus valables en général pour une suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0 \,,$$

et ce quel que soit le choix des métriques sur les trois fibrés.

2. THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH ARITHMÉTIQUE

2.1. Soit X une variété arithmétique. On définit comme suit une application $\mathbb{Q}$-linéaire d'*intégration sur* X

$$\int_X : \widehat{\mathrm{CH}}^{\cdot}(X)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}\,.$$

L'image de la classe α d'un couple (Z, g) est nulle sauf si $Z = \sum_x n_x\, x$ est un cycle de dimension zéro et g est un courant de degré maximum sur $X(\mathbb{C})$, auquel cas

$$\int_X \alpha = \sum_x n_x \log(\#k(x)) + \frac{1}{2}\int_{X(\mathbb{C})} g\,.$$

On a noté $\#k(x)$ le cardinal du corps résiduel au point fermé $x \in X$ (un corps fini), et défini l'intégrale de g comme étant celle d'une forme cohomologue à ce courant. Le morphisme

$$\int_S : \widehat{\mathrm{CH}}^1(S) \to \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

2.2. Soit M un $\mathbb{Z}$-module de type fini et h un produit scalaire hermitien sur $M_{\mathbb{C}}$, invariant par la conjugaison complexe. On pose

$$\widehat{\deg}(\bar{M}) = \int_S \hat{c}_1(\det(\bar{M}))\,.$$

Si M_{tors} est le sous-groupe de torsion de M et si $M_{\mathbb{R}}$ est muni de la mesure euclidienne définie par h, on a

$$\widehat{\deg}(\bar{M}) = \log(\#M_{\mathrm{tors}}) - \log \mathrm{vol}\left(\frac{M_{\mathbb{R}}}{M}\right)\,.$$

2.3. Soit X une variété arithmétique et h_X une métrique hermitienne sur le fibré tangent $TX(\mathbb{C})$, invariante par F_∞. Notons $\omega_0 \in A^{11}(X_{\mathbb{R}})$ la forme telle que

$$\omega_0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} h_X\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) dz_\alpha\, d\bar{z}_\beta$$

pour tout choix d'une carte locale (z_α) sur $X(\mathbb{C})$. On suppose que h_X est Kähler, c'est-à-dire $d\omega_0 = 0$.

Si $\bar{E}$ est un fibré hermitien sur X, les groupes de cohomologie $H^q(X, E)$ sont de type fini. Pour tout entier $q \geq 0$, l'espace vectoriel complexe

$$H^q(X, E)_{\mathbb{C}} = H^q(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$$

est canoniquement isomorphe à celui des formes différentielles harmoniques de type $(0, q)$ sur $E_{\mathbb{C}}$. On note $A^{0q}(X(\mathbb{C}), E_{\mathbb{C}})$ l'espace vectoriel de toutes les différentielles