

326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI

VOLUME 2007/2008

EXPOSÉS 982-996

(988) *Résultats non-perturbatifs
pour l'équation de Schrödinger
et d'autres cocycles quasi-périodiques*

L. Hakan ELIASSON

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**RÉSULTATS NON-PERTURBATIFS POUR L'ÉQUATION DE
SCHRÖDINGER ET D'AUTRES COCYCLES QUASI-PÉRIODIQUES**
[d'après Avila, Bourgain, Jitomirskaya, Krikorian, Puig]

par **L. Hakan ELIASSON**

INTRODUCTION

Soit G un groupe de matrices, et soit \mathbb{T}^d le tore $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la métrique

$$\|[x]\| = \inf_{k \in \mathbb{Z}^d} |x - k|.$$

Soit α un élément de \mathbb{T}^d tel que $\|\langle k, \alpha \rangle\| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que l'orbite $\{n\alpha : n \in \mathbb{Z}\}$ est dense en \mathbb{T}^d .

À une fonction $A : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ continue et homotope à l'identité, on associe l'homéomorphisme

$$(\alpha, A) : \begin{cases} \mathbb{T}^d \times G \rightarrow \mathbb{T}^d \times G \\ (\theta, X) \mapsto (\theta + \alpha, A(\theta)X). \end{cases}$$

Alors l'application itérée $(\alpha, A)^n$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + n\alpha, A_n(\theta)X) \quad n \in \mathbb{Z},$$

où

$$A_n(\theta) = \begin{cases} A(\theta + (n-1)\alpha) \dots A(\theta) & n \geq 1 \\ I & n = 0 \\ A(\theta + n\alpha)^{-1} \dots A(\theta - \alpha)^{-1} & n \leq -1. \end{cases}$$

La famille des matrices $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{n+m}(\theta) = A_n(\theta + m\alpha)A_m(\theta).$$

Remarque 0.1. — Il y a aussi une version de cocycle à temps continu. Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Soit $\alpha \in \mathbb{R}^d$ tel que $|\langle k, \alpha \rangle| \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0$, de sorte que

l'orbite $\{[t\alpha] : t \in \mathbb{R}\}$ est dense en \mathbb{T}^d . Soit $A : \mathbb{T}^d \rightarrow g$ continu ; considérons le système autonome

$$\theta' = \alpha, \quad X' = A(\theta)X$$

sur $\mathbb{T}^d \times G$. Son flot $(\alpha, A)^t$ a la forme

$$(\theta, X) \mapsto (\theta + [t\alpha], A_t(\theta)X) \quad t \in \mathbb{R},$$

et la famille des matrices $\{A_t : t \in \mathbb{R}\}$ vérifie la propriété des cocycles

$$A_{t+s}(\theta) = A_t(\theta + s\alpha)A_s(\theta).$$

La classe la plus importante, ou du moins la plus étudiée, est le *cocycle de Schrödinger* $(\alpha, A(\cdot, E))$ où

$$A(\theta, E) = \begin{pmatrix} V(\theta) - E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sa dynamique est liée aux propriétés spectrales de *l'opérateur de Schrödinger* $H_\theta : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$,

$$H_\theta u(n) = -\Delta u(n) + V(\theta + n\alpha)u(n),$$

où Δ est le laplacien

$$\Delta u(n) = u(n+1) + u(n-1).$$

Dans cet article, nous allons traiter de cocycles de classe \mathcal{C}^∞ ou analytique à fréquences diophantiennes α , c'est-à-dire que α satisfait une *condition diophantienne*

$$DC(\kappa, \tau) : \quad \| \langle k, \alpha \rangle \| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^d \setminus 0.$$

Il y a des résultats importants pour les cocycles qui sont seulement continus et/ou ont des fréquences qui ne sont pas diophantiennes (voir par exemple [3, 20, 43]) mais les techniques pour les étudier sont différentes et ne seront pas discutées ici.

Des méthodes de type KAM ont été utilisées avec succès depuis une cinquantaine d'années pour étudier la dynamique des cocycles quasi-périodiques. Cette théorie perturbative n'est valable qu'au voisinage d'un cocycle constant, et la taille de ce voisinage dépend des propriétés arithmétiques des fréquences.

Récemment deux approches beaucoup plus globales ont été développées. L'une est basée sur la renormalisation et a donné des résultats globaux, dus à R. Krikorian et A. Avila, pour des cocycles à valeurs dans $SU(2)$ et $SL(2, \mathbb{R})$. L'autre est basée sur des résultats de localisation dus à J. Bourgain et S. Jitomirskaya qui, combinés à un argument de dualité, ont permis à J. Puig de décrire la dynamique du cocycle de Schrödinger dans un cadre semi-global. Ces méthodes restent (pour le moment) restreintes à des cocycles avec une fréquence dans \mathbb{T} .

1. RÉDUCTIBILITÉ

1.1. Définition

Deux cocycles (α, A) et (α, A') sont *conjugués* s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ telle que

$$(0, Z)^{-1} \circ (\alpha, A)^n \circ (0, Z) = (\alpha, A')^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

ou, de manière équivalente,

$$Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta) = A'(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{T}^d.$$

On dit qu'ils sont \mathcal{C}^∞ -*conjugués* si Z est de classe \mathcal{C}^∞ .

Un cocycle (α, A) est constant si la fonction $A : \mathbb{T}^d \rightarrow G$ est constante. Il est *réductible* s'il est conjugué à un cocycle constant.

Cette notion de réductibilité s'avère inutilement restrictive. Plus généralement on dit qu'un cocycle (α, A) est réductible s'il existe une fonction continue $Z : \mathbb{R}^d / (2\mathbb{Z})^d \rightarrow G$ telle que

$$B = Z(\theta + \alpha)^{-1} A(\theta) Z(\theta)$$

soit constante. Dans le cas où Z est en effet définie sur \mathbb{T}^d , on dit qu'il est réductible mod \mathbb{Z}^d .

Remarque 1.1. — Ces notions de conjugaison et de réductibilité se généralisent immédiatement aux cocycles à temps continu.

Remarque 1.2. — Notez que la notion de réductibilité dépend du groupe G – c'est la G -réductibilité. Pour tout groupe de matrice G , réel ou complexe, en $GL(N, \mathbb{C})$, si un cocycle (α, A) à valeurs dans G est $GL(N, \mathbb{C})$ -réductible mod \mathbb{Z}^d , alors il est G -réductible [11].

Il a été démontré par Floquet que les cocycles à temps continu périodiques sont toujours réductibles. Les cocycles (à temps discret) périodiques sont aussi réductibles, quand cette notion est définie de manière appropriée. Les cocycles quasi-périodiques ne sont pas toujours réductibles.

Du point de vue dynamique un cocycle réductible est parfaitement compris – il a la même dynamique qu'un cocycle constant.

Les propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger H_θ sont fortement liées aux propriétés dynamiques du cocycle de Schrödinger $(\alpha, A(\cdot, E))$ associé. Si E n'est pas dans le spectre de H_θ , alors $(\alpha, A(\cdot, E))$ est réductible [32], mais cela n'est pas toujours le cas si E est dans le spectre [23]. Démontrer la réductibilité d'un cocycle de Schrödinger pour des énergies dans le spectre a été la clé de nombreuses propriétés spectrales de l'opérateur de Schrödinger correspondant : spectre absolument continu

[14, 16], existence de trous spectraux [42], mesure de Lebesgue du spectre [25, 50], régularité Hölder de la densité d'états intégrée [6, 25].

1.2. Obstructions à la réductibilité

Même les cocycles analytiques à fréquence diophantienne ne sont pas toujours réductibles. Par exemple, pour tout entier positif r ,

$$E_r(\theta) = e^{2\pi r h \theta}, \quad h = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

définit un cocycle non réductible en $\mathbb{T}^1 \times SU(2)$. Il existe aussi de tels cocycles dans $\mathbb{T}^d \times SU(2)$.

Ces cocycles non réductibles sont assez exceptionnels. Par exemple Krikorian montre [39] que les cocycles qui ne sont pas conjugués à $E_r(\theta)$ sont un ensemble ouvert et dense en topologie \mathcal{C}^∞ dans un petit \mathcal{C}^s -voisinage (pour un s suffisamment grand) autour des cocycles constants.

La question naturelle qui se pose pour des cocycles dans $SU(2)$, et aussi pour d'autres groupes compacts, est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est réductible.

L'exposant de Lyapunov d'un cocycle (α, A) en $SL(2, \mathbb{R})$ est

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}^d} \log(\|A_n(\theta)\|) d\theta.$$

C'est facile de montrer que cette limite existe, qu'elle est indépendante du choix de la norme matricielle et qu'elle est non-négative. Un cocycle (α, A) en $SL(2, \mathbb{R})$ est *hyperbolique* s'il existe deux sous-espaces continus, unidimensionnels et linéairement indépendants W_\pm et un $\gamma > 0$ constant tel que pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$ et tout $u \in W_\pm(\theta) \setminus 0$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \|A_n(\theta)u\| = -\gamma.$$

Dans ce cas, γ est l'exposant de Lyapunov. Tout cocycle hyperbolique en $SL(2, \mathbb{R})$ (qui est de classe \mathcal{C}^∞ ou analytique et qui a des fréquences diophantiennes) est réductible [31, 33].

À cause d'un théorème célèbre d'Oseledec [44], un cocycle qui a un exposant de Lyapunov positif mais qui n'est pas hyperbolique est appelé *non uniformement hyperbolique*. Ce n'est pas facile de voir que de tels cocycles existent, mais nous savons aujourd'hui qu'ils constituent une grande classe. Ce qui est facile de voir par contre, c'est qu'un tel cocycle ne peut pas être réductible.

Une question naturelle pour les cocycles dans $SL(2, \mathbb{R})$ est de savoir si presque tout (dans un sens raisonnable) cocycle est ou bien réductible ou bien non uniformement hyperbolique.