326

ASTÉRISQUE

2009

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2007/2008
EXPOSÉS 982-996

(991) *Courants d'Ahlfors et localisation des courbes entières*

Mihai PĂUN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2008
60e année, 2007–2008, nº 991, p. 281 à 297

COURANTS D'AHLFORS ET LOCALISATION DES COURBES ENTIÈRES [d'après Julien Duval]

par **Mihai PĂUN**

INTRODUCTION

En 1967, S. Kobayashi a introduit une *pseudo-distance* intrinsèque sur toute variété complexe X de la manière suivante.

Etant donnés $x, y \in X$, on considère toutes les familles finies de points de $(w_1, ...w_N)$ contenus dans X telles que $w_1 := x, w_N := y$ et telles que, pour chaque $1 \leq j \leq N-1$, le couple de points (w_j, w_{j+1}) appartienne à l'image d'un disque holomorphe. La distance entre deux points à l'intérieur de chaque disque est mesurée par rapport à la métrique de Poincaré ; la pseudo-distance de Kobayashi $d_X(x, y)$ est alors la limite inférieure sur toutes familles de points de la somme des distances $d_{\mathbb{D}}(w_j, w_{j+1})$ entre les points successifs (on remarquera l'analogie avec la distance induite par une métrique riemannienne).

La version infinitésimale de d_X s'exprime de la manière suivante : étant donnés $x \in X$ et $v \in T_{X,x}$ un vecteur tangent, la norme de v par rapport à la *pseudo-métrique* de Kobayashi est

$$|v|_K := \inf\{r^{-1} : r > 0, \exists f \in \mathrm{H}(\mathbb{D}, X), f(0) = x, f'(0) = rv\}.$$

Lorsque cette pseudo-métrique est non-dégénérée, on dit que X est *hyperbolique.*

Dans cet exposé, nous allons principalement nous intéresser à la classe des variétés qui ne sont pas hyperboliques au sens de Kobayashi, i.e. il existe un point $x \in X$ et un vecteur $v \in T_{X,x}$ tels que $|v|_K = 0$. Notre but est de présenter un résultat récent et très remarquable dû à J. Duval, qui met en évidence des conséquences géométriques importantes de la dégénérescence de $|\cdot|_K$ pour les *variétés X compactes*, ainsi que des corollaires qui en découlent.

Avant d'énoncer le résultat principal, introduisons un peu de terminologie. Soit ω une métrique fixée sur X, et considérons $\varphi_m : \overline{\mathbb{D}} \to X$ une famille d'applications holomorphes définies sur l'adhérence du disque unité, telles que la longueur du bord $\varphi_m(\partial\mathbb{D})$ divisée par l'aire de $\varphi_m(\mathbb{D})$ tende vers zéro lorsque $m \to \infty$.

DÉFINITION 0.1. — *Un courant T de bidimension $(1,1)$ est dit d'Ahlfors si*

$$\langle T, \alpha \rangle = \lim_m \frac{1}{\int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \omega} \int_{\mathbb{D}} \varphi_m^\star \alpha$$

où α est une forme de type $(1,1)$ sur X.

Nous remarquons le fait qu'un courant d'Ahlfors T est *positif et fermé.* Dans ce contexte, le résultat de J. Duval est le suivant.

THÉORÈME 0.2 ([**12**]). — *Soit T un courant d'Ahlfors sur X, et soit $K \subset X$ un compact chargé par T. Alors il existe une courbe entière $\varphi : \mathbb{C} \to X$ telle que l'aire de l'intersection de son image avec K soit non-nulle.* □

En rapport étroit avec ce résultat, on pourrait rappeler le lemme classique de Brody : *une suite divergente de disques tracés sur X produit par reparamétrage une courbe entière dont la norme de la dérivée est uniformément bornée* (cf. [**3**]). Nous pouvons constater que même si la suite précédente fixe un point, il n'est pas garanti que ce point va se retrouver dans l'image de la courbe entière produite – principalement à cause des reparamétrisations. Un exemple dû à J. Winkelmann illustrant ce phénomène se trouve dans l'article [**26**]. Le théorème précédent peut donc être vu comme une version qualitative du lemme de Brody.

Dans le but de mieux cerner la portée du résultat de J. Duval, considérons une variété projective X telle qu'il existe $Z \subsetneq X$ avec la propriété suivante : l'image de toute courbe entière non-constante $\varphi : \mathbb{C} \to X$ est contenue dans Z. Alors étant donnée une suite de disques φ_m divergente au sens de Gromov, l'accumulation de l'aire lorsque $m \to \infty$ peut se produire au voisinage de Z uniquement. Ainsi, le théorème ci-dessus est une excellente illustration du « principe de Bloch », tel qu'il a été interprété dans [**18**].

Avant d'expliquer en quelques mots le mécanisme de la démonstration de 0.2, nous voulons présenter quelques corollaires. Le premier caractérise l'hyperbolicité d'une variété complexe compacte *via* une inégalité isopérimétrique linéaire « à la Gromov ».

COROLLAIRE 0.3 ([**12**], [**15**]). — *Une variété complexe compacte X est hyperbolique si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\mathrm{aire}(\Delta) \leq C \,\mathrm{long}(\partial\Delta)$$

pour tout disque holomorphe $\Delta \subset X$. □

Soit T un courant d'Ahlfors ; le théorème de décomposition de Siu (voir [**25**]) montre que

$$T = \sum_j \nu_j [C_j] + R$$

où les $C_j \subset X$ sont des courbes compactes, et R est un courant positif fermé. Le théorème 0.2 montre en particulier le résultat suivant.

Corollaire 0.4 ([**12**], [**11**]). — *Le genre géométrique des courbes C_j ci-dessus est inférieur ou égal à* 1.

Il convient de citer ici un théorème dû à T. Nishino et M. Suzuki. Soit $f : \mathbb{D} \setminus \{0\} \to X$ une application holomorphe. On note

$$f(0) := \{x \in X / x = \lim_m f(z_m) \text{ ou } (z_m) \subset \mathbb{D} \setminus \{0\}, z_m \to 0\};$$

c'est un ensemble fermé, et on a (voir [**20**]) : *si $f(0)$ coïncide avec une courbe analytique $C \subset X$, alors le genre géométrique de toute composante de C est zéro ou un.* □

Voici en quelques mots le schéma de la preuve : l'outil technique principal est une version très astucieuse du théorème de compacité de Bishop-Gromov pour une famille de disques d'aire majorée.

Un lemme de Besicovitch montre que, pour tout entier positif $m \gg 0$, il existe dans $\mathbb{D}$ une famille F_m de disques disjoints, dont l'image par φ_m intersecte un voisinage de K selon un ensemble d'aire ≥ 1 ; le nombre de tels disques est de l'ordre de l'aire de l'image de φ_m (notée a_m), car T charge K. Un argument simple montre qu'on peut supposer de plus que l'aire de l'image de ces disques est majorée uniformément (par rapport à m). Si on croit à l'énoncé 0.2, le germe de la courbe entière qu'on doit obtenir se trouve parmi ces disques, et une idée importante dans l'approche de J. Duval est tout simplement de « doubler » les disques à la source. Plusieurs problèmes se posent : d'abord, les disques de rayon double doivent être contenus dans $\mathbb{D}$. Ce serait le cas pour une grande partie de notre famille de disques, comme conséquence de l'hypothèse *T fermé*. Ensuite, rien ne garantit qu'après avoir doublé le rayon des disques, on conserve un nombre de l'ordre de a_m de disques *disjoints* (et, sans cela, on ne peut plus obtenir un majorant uniforme de l'aire de leur image). L'argument à ce moment devient dichotomique : si le nombre de disques disjoints de rayon double est toujours de l'ordre de a_m, on recommence ce processus ; sinon, on produit des anneaux disjoints de module arbitrairement grand, qui finiront par engendrer une image non-constante de $\mathbb{C}^\star$.

Ce texte est organisé comme suit. Dans la première partie, on esquisse la preuve du 0.2, en suivant de très près l'article original [**12**]. Ensuite, nous allons évoquer certains faits/observations illustrant le rapport entre ce résultat et les travaux de

M. McQuillan et M. Brunella concernant les courbes entières tangentes aux feuilletages holomorphes par disques. Finalement, on voudrait mettre en évidence quelques problèmes de géométrie algébrique où les idées et techniques introduites dans [**12**] pourraient être utiles. □

Je remercie pour leur aide à la préparation de cet exposé M. Brunella, F. Campana, B. Claudon, M. Damian, O. Debarre, J. Duval et M. McQuillan. □

1. QUELQUES IDÉES DE LA PREUVE DE 0.2

1.1. La technique

Notre point de départ sera le théorème de compacité de Bishop-Gromov, dans la version suivante (voir e.g. [**1**], [**13**], [**24**]).

Théorème 1.1. — *Considérons $(g_m) \subset \mathrm{H}(\mathbb{D}, X)$ une suite d'applications telle que l'aire de l'image $\Delta_m := g_m(\mathbb{D})$ soit uniformément majorée. Alors, quitte à extraire, on a :*

1. *la suite g_m converge vers g sur $\mathbb{D}$ privé d'un nombre fini de points d'explosion e_j ;*
2. *la limite g se prolonge sur tout le disque $\mathbb{D}$;*
3. *en un point d'explosion $e \in \mathbb{D}$, il existe une suite de disques $d_m \subset \mathbb{D}$ qui tendent vers e et telle que les $g_m(d_m)$ convergent vers une réunion finie de courbes rationnelles.*

La convergence du point 3) est celle de Hausdorff et est en aire ; on dit alors que g_m converge vers g *au sens de Gromov.* □

On remarquera que, dans le cas où les g_m sont définies sur *l'adhérence* du disque unité, l'analyse des explosions au $\partial\mathbb{D}$ produit soit des courbes rationnelles, soit des *disques* (cette dernière éventualité se produit, par exemple, lorsque le rapport entre la norme de la dérivée et la distance au bord est borné). Au vu du théorème qu'on veut démontrer, nous voulons donner un critère pour empêcher cette dernière possibilité de se produire ; c'est une première contribution importante de l'article [**12**], dont voici les deux versions ci-dessous.

Corollaire 1.2 ([**12**]). — *Soit $f_m : \mathbb{D} \setminus d_m \to X$ une famille de disques holomorphes, où d_m est une suite de disques convergeant vers l'origine. On suppose que la longueur de $f_m(\partial d_m)$ converge vers zéro, et que l'aire de l'image des (f_m) est uniformément bornée. Alors f_m tend au sens de Gromov vers une application $f_\infty \in \mathrm{H}(\mathbb{D}, X)$.*